En el modelo del problema anterior supongamos que $x_i > 0$ y que $\mathbb{V}(\epsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$, es decir, no se cumple la hipótesis de homocedasticidad. Calcula en este caso la esperanza y la varianza del estimador de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_1$. Consideremos ahora el estimador alternativo $\tilde{\beta}_1$ que se obtiene al minimizar la expresión $\sum_{i=1}^n w_i(y_i - \beta_1 x_i)^2$, donde $w_i = 1/x_i^2$. A $\tilde{\beta}_1$ se le llama *estimador de mínimos cuadrados ponderados* (*weighted least squares estimator*). Calcula una fórmula explícita para $\tilde{\beta}_1$ y, a partir de ella, deduce su esperanza y su varianza. Compara los estimadores $\widehat{\beta_1}$ y $\tilde{\beta}_1$. ¿Cuál es mejor?

Solución:
El modelo es

$$(Y_i|X = x_i) \;=\; \beta_1 x_i + \epsilon_i, \text{ donde } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 x_i^2) \text{ independientes}, \quad i = 1, \dots, n.$$

El estimador de mínimos cuadrados es:

$$\hat{\beta}_1 = (\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}})^{-1}\tilde{\mathbb{X}}\mathbf{Y},$$

donde

$$\tilde{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Antes de calcular la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}_1$, observemos primero que $\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathrm{diag}(x_1^2, \dots, x_n^2)$ y que $\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}} = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Entonces, $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado de β:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}_1) = (\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}})^{-1}\tilde{\mathbb{X}}'\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = (\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}})^{-1}\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}}\beta_1 = \beta_1.$$

Respecto a su varianza:

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) = (\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}})^{-1}\tilde{\mathbb{X}}'\mathbb{V}(\mathbf{Y})\tilde{\mathbb{X}}(\tilde{\mathbb{X}}'\tilde{\mathbb{X}})^{-1} = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{m_4}{\tilde{m}_2^2}\right),$$

donde

$$m_4 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \qquad \text{y} \qquad \tilde{m}_2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Para determinar la expresión del estimador de mínimos cuadrados ponderados, denotamos WRSS := $\sum_{i=1}^n w_i(y_i - \beta_1 x_i)^2$ e igualamos la derivada de esta expresión a 0:

$$0 = \frac{\partial \mathrm{WRSS}}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \beta_1 x_i).$$

Obtenemos

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\tilde{\mathbb{X}}'_{\mathrm{inv}}\mathbf{Y},$$

donde

$$\tilde{\mathbb{X}}'_{\mathrm{inv}} = \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)'.$$

Esperanza del estimador de mínimos cuadrados ponderados:

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}_1) = \frac{1}{n}\tilde{\mathbb{X}}'_{\mathrm{inv}}\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \beta_1.$$

Varianza del estimador de mínimos cuadrados ponderados:

$$\mathbb{V}(\tilde{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} < \mathbb{V}(\hat{\beta}_1).$$

El criterio habitual para medir la "bondad" de un estimador $\hat{\theta}$ de θ es el error cuadrático medio $\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathrm{Sesgo}^2(\hat{\theta}) + \mathrm{Var}(\hat{\theta})$. Por tanto, como $\mathrm{ECM}(\tilde{\beta}_1) < \mathrm{ECM}(\hat{\beta}_1)$, concluimos que es mejor $\tilde{\beta}_1$.