Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0,0,0)'$ y matriz de covarianzas

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina razonadamente cuáles de los siguientes pares de variables o vectores aleatorios son independientes y cuáles no: (i) X_1 y X_2; (ii) $(X_1, X_3)'$ y X_2; (iii) X_1 y $X_1 + 3X_2 - 2X_3$.

b) Determina una matriz $\mathbf{B}$ tal que la variable aleatoria $(X_2, X_3)\mathbf{B}(X_2, X_3)'$ tenga distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

Solución:

a) Como el vector $\mathbf{X}$ es normal, cualesquier dos combinaciones lineales de componentes de $\mathbf{X}$ son independientes entre sí si la covarianza entre ellas es 0.

(i) $C(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow X_1$ y X_2 independientes

(ii) $C((X_1, X_3)', X_2)) = (0,0)' \Rightarrow (X_1, X_3)'$ y X_2 independientes

(iii) $C(X_1, X_1 + 3X_2 - 2X_3) = (1,0,0)\mathbf{\Sigma}(1,3,-2)' = 6 \neq 0 \Rightarrow X_1$ y $X_1 + 3X_2 - 2X_3$ no son independientes

b) Como el vector $X_2, X_3)'$ sigue una distribución normal bivariante con vector de medias $(0,0)'$ y matriz de covarianzas $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tenemos que $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.