Sea el vector aleatorio $(X, Y, Z)'$ con distribución

$$N_3\left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc} 5 & 1 & c \\ 1 & 5 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{array}\right)\right).$$

Determinar la distribución de $(X, Y)'|Z = z$. Determinar el valor de c para el que la correlación de X e Y condicionada a $Z = z$ vale 0.

Solución: La distribución de $(X, Y)'|Z = z$ es normal bivariante con vector de esperanzas y matriz de covarianzas respectivamente

$$\mathbb{E}\left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right) = \frac{z}{3}\left(\begin{array}{c} c \\ 2 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \mathbb{V}\left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 5 - \frac{c^2}{3} & 1 - \frac{2c}{3} \\ 1 - \frac{2c}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right).$$

La correlación de X e Y condicionada a $Z = z$ vale 0 si y sólo si la covarianza de X e Y condicionada a $Z = z$ es 0, es decir, si y sólo si

$$1 - \frac{2c}{3} \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}.$$