ESTADÍSTICA II
Grado en Matemáticas (2022/23)

Tema 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE

1.1. Sea $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)' \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0)'$ y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la distribución del vector $(X_1, X_2)'$, donde $X_1 = Y_1 + Y_3$ y $X_2 = Y_2 + Y_3$.
b) ¿Existe alguna combinación lineal de las variables aleatorias Y_i que sea independiente de X_1?

1.2. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0, 0, 0)'$ y matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina razonadamente cuáles de los siguientes pares de variables o vectores aleatorios son independientes y cuáles no: (i) X_1 y X_2; (ii) $(X_1, X_3)'$ y X_2; (iii) X_1 y $X_1 + 3X_2 - 2X_3$.
b) Determina una matriz $\mathbf{B}$ tal que la variable aleatoria $(X_2, X_3)\mathbf{B}(X_2, X_3)'$ tenga distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

1.3. Sea $(X, Y)'$ un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. Tanto X como Y tienen distribución normal estándar. La covarianza entre X e Y es ρ, donde $|\rho| < 1$.

a) Determina cuál es la distribución del vector $(2X - 3Y, X + Y)'$.
b) Determina cuál es la distribución de la variable $(X^2 - 2\rho XY + Y^2)/(1 - \rho^2)$.

1.4. Sean X_i, $i = 1, 2$, dos variable aleatorias independientes con distribución $N(\mu_i, \sigma_{ii})$ respectivamente. Demuestra que el vector $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ tiene distribución normal bidimensional.

1.5. Sea $(X, Y)'$ un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)\right].$$

Calcula la distribución condicionada de X dado $Y = y$, y la de Y dado $X = x$.

1.6. Sea el vector aleatorio $(X, Y, Z)'$ con distribución

$$N_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & c \\ 1 & 5 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

Determinar la distribución de $(X, Y)'|Z = z$. Determinar el valor de c para el que la correlación de X e Y condicionada a $Z = z$ vale 0.

1.7. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0, 0, 0)'$ y matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definamos las v.a. $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = 2X_1 - X_2$ e $Y_3 = 2X_3 - X_2$. Calcula la distribución de Y_3 dado que $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 1$.

1.8. Sean $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ y $\mathbf{X}_4$ vectores aleatorios independientes, cada uno de ellos con distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Determinar la distribución del vector

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{X}_4.$$

1.9. Demuestra que si $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio con distribución $\mathrm{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ y v.a.i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ con distribución χ_1^2 tales que $\|\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\|^2$ se distribuye igual que $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k$. En particular, deduce que si $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrica e idempotente y $\boldsymbol{\mu} = 0$, entonces $\|\mathbf{X}\|^2$ tiene distribución χ_r^2, donde r es la traza de $\boldsymbol{\Sigma}$.

1.10. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio normal tal que la correlación entre X_1 y X_2 es $\rho_{12} = 0.5$,

$$\begin{aligned} X_2|X_3 &\sim N(2X_3, 24), \\ X_3|X_1 &\sim N(2X_1 + 3, 14), \\ X_1 &\sim N(1, 4). \end{aligned}$$

Determinar la esperanza y la matriz de covarianzas de $\mathbf{X}$.

1.11. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, donde cada X_i sigue una distribución $N(\beta + \gamma z_i, \sigma^2)$, con β, γ y z_i, $i = 1, \ldots, n$, números reales fijos tales que $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n z_i^2 > 0$.

a) Determinar la distribución del vector $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

b) Determinar la distribución de la variable $Y = \sum_{i=1}^n z_i X_i / \sum_{i=1}^n z_i^2$, especificando completamente su esperanza y varianza.