Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0,0,0)'$ y matriz de covarianzas

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definamos las v.a. $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = 2X_1 - X_2$ e $Y_3 = 2X_3 - X_2$. Calcula la distribución de Y_3 dado que $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 1$.

Solución: El vector

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{X} = \mathbf{AX}$$

sigue una distribución normal trivariante con esperanza y matriz de covarianzas respectivamente

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{A\Sigma A}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $Y_3|(Y_1, Y_2)' \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$ con

$$\mu_c = 0 + (4, -2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 2Y_1 + Y_2$$

y

$$\sigma_c^2 = 22 - (4, -2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 16.$$