Demuestra que si $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio con distribución $\mathrm{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ y v.a.i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ con distribución χ_1^2 tales que $\|\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\|^2$ se distribuye igual que $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k$. En particular, deduce que si $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrica e idempotente y $\boldsymbol{\mu} = 0$, entonces $\|\mathbf{X}\|^2$ tiene distribución χ_r^2, donde r es la traza de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Solución:

Usaremos la descomposición espectral de $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{CDC}'$, siendo $\mathbf{C}$ la matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores ortogonalizados de $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ la matriz diagonal con los correspondientes autovalores de $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\|^2 &= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\ \boldsymbol{\Sigma}\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\ \mathbf{CDC}'\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2})'\ \mathbf{D}\ \mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= \mathbf{Z}'\ \mathbf{D}\ \mathbf{Z} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_i^2,
\end{aligned}
$$

siendo $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)' = \mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$. El vector $\mathbf{Z}$ sigue una distribución N_k con esperanza $\mathbf{0}_k$ y matriz de covarianzas

$$
\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2})' = \mathbf{I}_k.
$$

Luego las Z_i son v.a.i.i.d. N(0,1) y $Y_i = Z_i^2 \sim \chi_1^2$.

Si $\boldsymbol{\Sigma}$ es idempotente (es decir, $\boldsymbol{\Sigma}^2 = \boldsymbol{\Sigma}$), entonces todos sus autovalores son 0 ó 1. Para ver esto basta observar que, si λ es un autovalor de $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\mathbf{e}$ su correspondiente autovector normalizado, entonces sólo se puede cumplir que $\boldsymbol{\Sigma}^2\mathbf{e} = \lambda^2\mathbf{e}$ sea igual a $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ si λ es 0 ó 1. Entonces $r = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ es el número de autovalores λ_i distintos de 0 y además

$$
\|\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\|^2 = \sum_{i=1}^{r} Y_i,
$$

es decir, la suma de r v.a.i.i.d. χ_1^2, que es una χ_r^2.