Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, donde cada X_i sigue una distribución $N(\beta + \gamma z_i, \sigma^2)$, con β, γ y z_i, $i = 1, \ldots, n$, números reales fijos tales que $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ y $\sum_{i=1}^n z_i^2 > 0$.

a) Determinar la distribución del vector $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

b) Determinar la distribución de la variable $Y = \sum_{i=1}^n z_i X_i / \sum_{i=1}^n z_i^2$, especificando completamente su esperanza y varianza.

Solución:

a) Como los X_i son independientes y su distribución es normal univariante, la distribución del vector $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ es normal n-variante, con esperanza y matriz de covarianzas

$$E(\mathbf{X}) = \beta \mathbf{1}_n + \gamma \mathbf{z} \quad \text{y} \quad V(\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n,$$

siendo $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)'$.

b) Por ser $Y = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \mathbf{z}'\mathbf{X}$ una combinación lineal de bX, la distribución de Y es normal univariante con esperanza y varianza:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \mathbf{z}'(\beta \mathbf{1}_n + \gamma \mathbf{z}) = \gamma \qquad \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \mathbf{z}' \sigma^2 \mathbf{I}_n \frac{1}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \mathbf{z} = \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{z}\|_2^2}$$