Formas cuadráticas bajo normalidad

Proposición: Sea $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ y sea $\mathbf{B}$ una matriz $n \times n$ simétrica e idempotente. Supongamos que $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = 0$. Entonces

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y} \sim \chi^2_p,$$

donde p es la traza de $\mathbf{B}$.

Dem: Observemos que

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y} = \left(\frac{\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu}}{\sigma}\right)' \mathbf{B} \left(\frac{\mathbf{Y}-\boldsymbol{\mu}}{\sigma}\right) - \frac{2}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}.$$

Por hipótesis, $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = 0$. Además $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\mathbf{Y} = 0$, porque tiene media y varianza iguales a 0. Por tanto, basta probar que, si $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n)$, entonces

$$\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X} \sim \chi^2_p. \tag{1}$$

Para probar (1), como $\mathbf{B}$ es simétrica, la descomponemos como $\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'$, donde $\mathbf{C}$ es la matriz cuyas columnas son los autovectores de $\mathbf{B}$ ortonormalizados y $\mathbf{D} = (D_{ij})_{i,j=1}^n$ es la matriz diagonal cuya diagonal principal contiene los autovalores de $\mathbf{B}$. Entonces

$$\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}'\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{D}\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^n D_{ii}\xi_i^2,$$

siendo $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)' = \mathbf{C}'\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n)$. Por tanto, $\xi_i \sim N(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$, son v.a. independientes.
Como $\mathbf{B}$ es idempotente todos sus autovalores valen 0 ó 1. Sea $\mathcal{J} := \{i : D_{ii} = 1\}$. Entonces $\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \xi_i^2 \sim \chi^2_{\mathrm{card}(\mathcal{J})}$. Finalmente $\mathrm{card}(\mathcal{J}) = \sum_{i=1}^n D_{ii} = \mathrm{tr}(\mathbf{B})$. $\square$

Proposición: Sea $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ y sean $\mathbf{A}_{p\times n}$, $\mathbf{B}_{q\times n}$, $\mathbf{C}_{n\times n}$ y $\mathbf{D}_{n\times n}$ con $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ simétricas e idempotentes.

1. $\mathbf{AY}$ y $\mathbf{BY}$ son independientes $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{AB}' = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{Y}'\mathbf{CY}$ e $\mathbf{Y}'\mathbf{DY}$ son independientes $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{CD} = \mathbf{0}$.

3. $\mathbf{AY}$ e $\mathbf{Y}'\mathbf{CY}$ son independientes $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$.

Dem:

1. Definimos el vector
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{AY} \\ \mathbf{BY} \end{pmatrix}$$
que sigue una distribución
$$N_{p+q}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}, \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \sigma^2 \mathbf{I}_n (\mathbf{A}'\mathbf{B}')\right) = N_{p+q}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{AA}' & \mathbf{AB}' \\ \mathbf{BA}' & \mathbf{BB}' \end{pmatrix}\right)$$
Entonces $\mathbf{AY}$ y $\mathbf{BY}$ son subvectores de un vector aleatorio normal y son independientes si y sólo si su matriz de covarianzas cruzadas $\mathbb{C}(\mathbf{AY}, \mathbf{BY}) = \sigma^2 \mathbf{AB}'$ es una matriz de ceros, es decir, si y sólo si $\mathbf{AB}' = \mathbf{0}$.

2. Definimos el vector
$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'\mathbf{CY} \\ \mathbf{Y}'\mathbf{DY} \end{pmatrix}$$
Entonces $\mathbf{Y}'\mathbf{CY}$ y $\mathbf{Y}'\mathbf{DY}$ son independientes si y sólo si, en todo punto, la función característica del vector $\boldsymbol{\xi}$ es igual al producto de las funciones características de $\mathbf{Y}'\mathbf{CY}$ y $\mathbf{Y}'\mathbf{DY}$, es decir, si
$$\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{Y}'\mathbf{CY}}(t_1)\, \varphi_{\mathbf{Y}'\mathbf{DY}}(t_2) \quad \text{para todo } \mathbf{t} = (t_1, t_2)' \in \mathbb{R}^2.$$
Ahora bien,
$$\varphi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\xi}}) = \mathbb{E}(e^{it_1\mathbf{Y}'\mathbf{CY}}\; e^{it_2\mathbf{Y}'\mathbf{DY}})$$
Observemos que, al ser $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ simétricas e idempotentes, se cumple que $\mathbf{Y}'\mathbf{CY} = \mathbf{Y}'\mathbf{C}'\mathbf{CY} = \|\mathbf{CY}\|_2^2$ y $\mathbf{Y}'\mathbf{DY} = \|\mathbf{DY}\|_2^2$. Entonces $\mathbf{Y}'\mathbf{CY}$ y $\mathbf{Y}'\mathbf{DY}$ son independientes si y sólo si $\mathbf{CY}$ y $\mathbf{DY}$ lo son, lo cual sucede si y sólo si $\mathbf{CD}' = \mathbf{CD} = \mathbf{0}$. $\square$