APELLIDOS (mayúsculas)	NOMBRE (mayúsculas)

ESTADÍSTICA I (2022-2023)
Grado en Matemáticas / Doble grado Ing. Informática-Matemáticas
Examen final (9 de enero de 2023)

1. Se miden los tiempos (en minutos) en los que unos corredores de una carrera de 80 km terminan el primer tramo (km 0 a km 10) y el segundo tramo de (km 10 a km 20). Denotamos estos tiempos por X e Y respectivamente.

Corredor	Muestra 1 (x_i) 0-10 km	Muestra 2 (y_i) 10-20 km
1	37.0	37.8
2	39.5	42.2
3	42.5	43.1
4	43.3	45.2
5	45.2	46.9
6	46.1	46.0
7	47.2	52.1
8	49.2	48.8
9	51.7	54.0

a) (1.5 puntos) A un nivel de significación 0.01, ¿hay evidencia muestral de que el tiempo medio que tarda un corredor en cubrir el segundo tramo (10-20 km) es superior al que emplea en el primer tramo de la carrera? ¿Qué puedes decir del p-valor del contraste? Especificar las suposiciones necesarias para garantizar la validez del procedimiento empleado.

INDICACIÓN: Aunque este problema puede resolverse directamente a partir de los datos con ayuda de una calculadora, algunas de las siguientes cantidades pueden facilitar los cálculos: $\sum x_i = 401.7$, $\sum y_i = 416.1$, $\sum x_i^2 = 18100.01$, $\sum y_i^2 = 19437.79$, $\sum (x_i - y_i)^2 = 44.26$, $\sum x_i y_i = 18746.77$.

b) (1 punto) Haz corresponder (razonadamente) los elementos de la columna de la izquierda con sus correspondientes valores en la columna de la derecha:

Cuantil 0.1 de la muestra 2	47.2
Residuo e_1 al predecir la Y del corredor 1 mediante la recta de regresión sobre X	0.946
Función de distribución empírica de la muestra 1 evaluada en 46.0	37.8
Correlación entre los tiempos de un corredor en los dos tramos	0.67
Pendiente de la recta de regresión de la muestra 2 sobre la muestra 1	0.56
Función de distribución empírica de la muestra 2 evaluada en 46.9	-0.6194
Cuantil 0.75 de la muestra 1	1.0237

INDICACIÓN: Los cuantiles se han calculado utilizando la función cuantílica empírica.

2. La distribución logística es un modelo muy utilizado en las ciencias experimentales. Su funciones de densidad y de distribución son, respectivamente

$$f(x;\mu,\beta)=\frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\beta\left(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}+1\right)^2} \qquad \text{y} \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t;\mu,\beta)dt=\frac{1}{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}+1}\ ,\quad x\in\mathbb{R},$$

siendo $\mu\in\mathbb{R}$ y $\beta>0$ los parámetros del modelo.

a) (1 punto) Calcular la función cuantílica, la mediana y la moda.

b) (1 punto) Proponer un estimador consistente de μ basado en una muestra $X_1,\ldots,X_n$.

Indicación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\beta\left(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}+1\right)^2}=\frac{e^{\frac{\mu+x}{\beta}}\left(e^{\frac{\mu}{\beta}}-e^{\frac{x}{\beta}}\right)}{\beta^2\left(e^{\frac{\mu}{\beta}}+e^{\frac{x}{\beta}}\right)^3}.$$

3. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una muestra extraída de una v.a. con densidad exponencial de parametro θ, es decir, $f(x|\theta) = \theta\, e^{-\theta x}$, para $x \geq 0$, donde $\theta > 0$.
Supongamos que se dispone de información a priori sobre θ que se resume en una distribución a priori con densidad exponencial de parámetro 1.

a) (1.5 puntos) Calcular el estimador Bayes de θ y estudiar su consistencia.

b) (2 puntos) Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ y determinar su distribución asintótica. Utilizar este resultado para obtener un intervalo de confianza aproximado para θ.

INDICACIÓN: La densidad de la distribución $\gamma(a, p)$ es

$$f(x|a,p) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}\, e^{-ax}\, x^{p-1} \ , \quad \text{para } x \geq 0 \ , \quad \text{donde } a > 0 \text{ y } p > 0.$$

La media y varianza de esta distribución son p/a y p/a^2 respectivamente.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una distribución uniforme en el intervalo $(0, \theta)$, con $\theta \geq 1/2$. Denotamos por $X_{(n)}$ el máximo de la muestra. Para contrastar $H_0 : \theta = 1/2$ frente a $H_1 : \theta > 1/2$, utilizamos la región de rechazo $R = \{x_{(n)} > c\}$.

a) (1 punto) ¿Cuál es el valor de c tal que el nivel de significación del contraste es 0.05?

b) (1 punto) Para $n = 20$, ¿qué valor tomaría la función de potencia en el punto $\theta = 3/4$?