Estudiar si es eficiente el e.m.v. del parámetro λ en una distribución de Poisson.

Solución: La función de masa de la Poisson es:

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, la logverosimilitud del parámetro λ, dada una muestra $x_1, \dots, x_n$, es

$$\log L_n(\lambda; x_1, \dots, x_n) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda - \log(x_1! \cdots x_n!).$$

El e.m.v. de λ, $\hat{\lambda}_n = \bar{X}$, se obtiene como raíz de la ecuación de verosimilitud

$$\frac{d\log L_n}{d\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0.$$

Un estimador insesgado es eficiente si su varianza coincide con la cota de Fréchet-Cramer-Rao. Obviamente $\hat{\lambda}_n$ es insesgado y su varianza es

$$\mathbb{V}_\lambda(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{V}_\lambda(\bar{X}) = \frac{\mathbb{V}_\lambda(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Cálculo de la cota de F-C-R:

$$\log f(x;\lambda) = -\lambda + x\log\lambda - \log(x!)$$

$$\frac{d\log f(x;\lambda)}{d\lambda} = -1 + \frac{x}{\lambda}$$

$$\frac{d^2\log f(x;\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{x}{\lambda^2}$$

$$\text{Información de Fisher} = I(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{d\log f(X;\lambda)}{d\lambda}\right)^2\right] = 1 + \frac{\mathbb{E}_\lambda(X^2)}{\lambda^2} - 2\frac{\mathbb{E}_\lambda(X)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

o también

$$I(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left(-\frac{d^2\log f(X;\lambda)}{d\lambda^2}\right) = \frac{\mathbb{E}_\lambda(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

La cota (inferior) de F-C-R para la varianza de un estimador insesgado de λ es $\dfrac{1}{nI(\lambda)} = \dfrac{\lambda}{n}$. Por tanto, el e.m.v. de λ es eficiente.