Un modelo probabilístico utilizado en ocasiones para la v.a. "velocidad del viento" es la distribución de Rayleigh cuya función de densidad es

$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \;\; \theta > 0.$$

La media y la varianza de esta distribución son, respectivamente, $\mu = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\theta^2$.

a) Calcular el estimador de θ por el método de los momentos. Estudiar si es asintóticamente normal y, en caso afirmativo, calcular su varianza asintótica.

b) Calcular el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud. ¿Es consistente?

c) Estudiar si el estimador de máxima verosimilitud es asintóticamente normal y, en caso afirmativo, calcular su varianza asintótica.

Solución: Es fácil comprobar que $\mathbb{E}(X^2) = 2\theta^2$ y $\mathbb{V}(X^2) = 4\theta^4$.

a) Para obtener $\tilde{\theta}_n$, el estimador de θ por el método de los momentos, igualamos las medias muestral y poblacional y despejamos el valor del parámetro de esta ecuación:

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}.$$

Por el TCL,

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N(0,\sigma) = N\left(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right).$$

Por tanto, la varianza asintótica es $2\sigma^2/\pi = (4-\pi)\theta^2/\pi$.

b) La función de verosimilitud es

$$L_n(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 \cdots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x_i \geq 0.$$

Función de logverosimilitud:

$$\log L_n(\theta) = \log(x_1 \cdots x_n) - 2n\log\theta - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Ecuación de verosimilitud:

$$\frac{d}{d\theta}\log L_n(\theta) = \frac{1}{\theta}\left(-2n + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = 0$$

El e.m.v. de θ es

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}}.$$

Es sencillo comprobar que $\hat{\theta}_n$ es punto de máximo de $\log L_n(\theta)$.
Para estudiar la consistencia del e.m.v., observemos que, por la LFGN, tenemos que

$$\hat{\theta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) = \theta^2.$$

El Teorema de la Aplicación Continua implica entonces que $\hat{\theta}$ converge c.s. a θ cuando $n \to \infty$.

c) Observemos que $\hat{\theta}_n = g(\bar{Y})$, siendo $g(x) = \sqrt{x/2}$ y $\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ con $Y_i = X_i^2$. Por el método delta

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n}(g(\bar{Y}) - g(\mathbb{E}(Y))) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, |g'(\mathbb{E}(Y))|\sqrt{\mathbb{V}(Y)}) = N\left(0, \frac{\theta}{2}\right).$$