Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. de una población con función de densidad $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, si $x \geq \theta$ (y 0 en caso contrario). Escribe la región crítica del contraste de razón de verosimilitudes de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Solución:

Primero calculamos $\hat{\theta}_n = \text{e.m.v.}(\theta)$. La función de verosimilitud es

$$L_n(\theta) = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, \qquad \text{si} \quad x_{(1)} \geq \theta.$$

Como es una función creciente en θ, definida en el intervalo $(-\infty, x_{(1)}]$, su punto de máximo es $\hat{\theta}_n = x_{(1)}$.

A continuación calculamos el estadístico del contraste de razón de verosimilitudes

$$\Lambda_n = \frac{\sup_{\theta \leq \theta_0} L_n(\theta)}{\sup_\theta L_n(\theta)} = \frac{L_n(\theta_0)}{L_n(x_{(1)})} = e^{n(\theta_0 - x_{(1)})}.$$

Por último, determinamos la región de rechazo del contraste de razón de verosimilitudes

$$R = \{\Lambda_n \leq k_\alpha\} = \{x_{(1)} \geq c_\alpha\}, \quad \text{donde } k_\alpha \text{ y } c_\alpha \text{ son tal que } \sup_{\theta \leq \theta_0} \mathbb{P}_\theta(R) = \alpha.$$

Para determinar c_α, calculamos

$$\mathbb{P}_\theta(R) = \mathbb{P}_\theta\{X_{(1)} \geq c_\alpha\} = (\mathbb{P}_\theta\{X \geq c_\alpha\})^n = e^{n(\theta - c_\alpha)}.$$

Por tanto,

$$\alpha = \sup_{\theta \leq \theta_0} \mathbb{P}_\theta(R) = e^{n(\theta_0 - c_\alpha)} \Rightarrow c_\alpha = \theta_0 - \frac{1}{n} \log \alpha$$

y

$$R = \left\{ x_{(1)} \geq \theta_0 - \frac{1}{n} \log \alpha \right\}.$$

Observación: La función de densidad del enunciado se puede escribir de manera compacta así:

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}},$$

por lo que la función de verosimilitud es:

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[e^{-(x_i - \theta)} \mathbb{1}_{\{x_i \geq \theta\}} \right] = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)} \mathbb{1}_{\{x_{(1)} \geq \theta\}} = e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{1}_{\{\theta \leq x_{(1)}\}} = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{n\theta} \mathbb{1}_{\{\theta \leq x_{(1)}\}}.$$

Como en la función de verosimilitud la muestra $x_1, \ldots, x_n$ se considera fija, $e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$ es una constante. La función de verosimilitud $L_n(\theta)$ es básicamente la exponencial $e^{n\theta}$ si $\theta \leq x_{(1)}$ y es 0 si $\theta > x_{(1)}$. Por eso alcanza el máximo en $x_{(1)}$. Si restringimos más el soporte de L_n (como en el numerador del cociente de verosimilitudes) y calculamos el máximo de L_n en el intervalo $(0, \theta_0]$, entonces el máximo se alcanza en θ_0 (ver dibujo).