La distribución de Hardy-Weinberg de parámetro θ toma los valores 1, 2 y 3 con las probabilidades siguientes:

Valores	1	2	3
Probabilidades	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

Se dispone de una muestra de tamaño 10 de v.a. independientes que siguen la distribución de Hardy-Weinberg. Entre los 10 datos, se ha observado dos veces el valor 1, cinco veces el valor 2, y tres veces el valor 3. Calcula el estimador de momentos y el estimador de máxima verosimilitud de θ.

Indicación: La distribución multinomial $\mathrm{M}(n, p_1, \ldots, p_k)$ surge al realizar n pruebas independientes, cada una de las cuales tiene k posibles resultados (mutuamente excluyentes). La función de masa es $P(o_1, \ldots, o_k) = \frac{n!}{o_1! \cdots o_k!} p_1^{o_1} \cdots p_k^{o_k}$, siendo o_j la frecuencia observada del resultado j en las n pruebas y p_j la probabilidad de obtener el resultado j en una prueba, con $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

Solución: Para determinar la estimación de θ por el método de los momentos igualamos

$$\mathbb{E}(X) = \theta^2 + 4\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 = -2\theta + 3$$

a la media muestral $\bar{x} = (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3)/10 = 2.1$, obteniendo un valor de 0.45 para la estimación.
La función de verosimilitud es

$$L(\theta; o_1 = 2, o_2 = 5, o_3 = 3) = \frac{10!}{2!5!3!}(\theta^2)^2(2\theta(1-\theta))^5((1-\theta)^2)^3 = \frac{10!2^5}{2!5!3!}\theta^9(1-\theta)^{11}$$

y la de log-verosimilitud

$$\log L(\theta) = \log\left(\frac{10!2^5}{2!5!3!}\right) + 9\log\theta + 11\log(1-\theta).$$

Al igualar a 0 la derivada de la logverosimilitud

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = \frac{9}{\theta} - \frac{11}{1-\theta},$$

obtenemos el emv $\hat{\theta} = 9/20 = 0.45$. Es sencillo comprobar que $d^2 \log L(\hat{\theta})/d\theta^2 < 0$.