Una v.a. positiva tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{(\theta + x)^2}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Consideramos el contraste de hipótesis $H_0 : \theta = 2$ frente a $H_1 : \theta = 3$. Supongamos que sólo tenemos una observación x en la muestra (de tamaño $n = 1$). Dar la expresión explícita de la región de rechazo (región crítica) del test uniformemente más potente de nivel $\alpha = 0.05$.

Solución: Por el lema de Neyman-Pearson, la región de rechazo del test UMP con nivel de significación α es

$$R = \left\{ \frac{f(x;\theta = 3)}{f(x;\theta = 2)} > k_\alpha \right\} \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \mathbb{P}_{\theta=2}(R).$$

Observemos que

$$\frac{f(x;\theta = 3)}{f(x;\theta = 2)} = \frac{3}{2}\left(\frac{2+x}{3+x}\right)^2 \Rightarrow R = \left\{ \left(\frac{2+X}{3+X}\right)^2 > \frac{2}{3}k_\alpha \right\}.$$

Como X es positiva, tenemos que $(2+X)/(3+X) > 0$. Por tanto, $((2+X)/(3+X))^2 > 2k_\alpha/3$ si y sólo si $(2+X)/(3+X) > (2k_\alpha/3)^{1/2}$. Ahora observemos que la función $g(x) = (2+x)/(3+x)$ es estrictamente creciente (basta calcular $g'(x) = 1/(3+x)^2 > 0$), por lo que la región de rechazo $R = \{(2+x)/(3+x) > (2k_\alpha/3)^{1/2}\}$ es equivalente a $R = \{x > c_\alpha\}$ donde c_α es tal que $\alpha = \mathbb{P}_{\theta=2}(R)$.

$$\alpha = \mathbb{P}_{\theta=2}(R) = \mathbb{P}_{\theta=2}\{X > c_\alpha\} = \int_{c_\alpha}^{\infty} \frac{2}{(2+x)^2}dx = \frac{2}{2+c_\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_\alpha = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \Rightarrow R = \left\{ x > \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \right\}$$