Sea $\mathbb{F}_4$ la función de distribución empírica correspondiente a la muestra $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$.

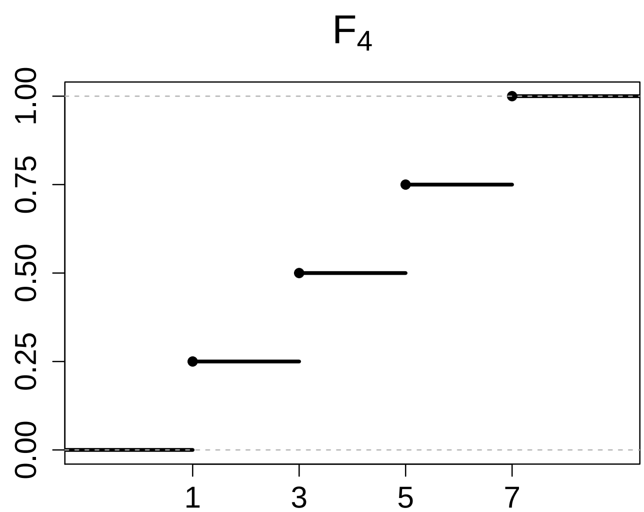
**a)** Si se observa $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 7$, determina el valor de $\mathbb{F}_4^{-1}(1/2)$.

**b)** Si se observa $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 7$ y $X^*$ es una variable aleatoria con distribución $\mathbb{F}_4$, calcula el valor esperado de $X^*$ (condicionado a la muestra).

**c)** Si $X_1$, $X_2$, $X_3$ y $X_4$ son vaiid con distribución uniforme en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, ¿cuál es la distribución de la variable aleatoria $4\mathbb{F}_4(5)$?

**Solución:**

**b)** La función de distribución empírica, $\mathbb{F}_4$, asociada a la muestra del enunciado es la función de distribución de una v.a. $X^*$ con distribución uniforme en los puntos $\{1, 3, 5, 7\}$, es decir, $\mathbb{P}\{X^* = x\} = 1/4$ para todo $x \in \{1, 3, 5, 7\}$. La esperanza de una v.a. cuya distribución es la empírica es siempre la media muestral: $\mathbb{E}(X^*) = (1 + 3 + 5 + 7)/4 = 4$.




**c)** Por definición de la función de distribución empírica, $\mathbb{F}_4(x) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{1}_{\{X_i \le x\}}/4$. Por tanto, $4\,\mathbb{F}_4(5) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{1}_{\{X_i \le 5\}}$, es decir, la suma de 4 v.a.i.i.d. del tipo $\mathbb{1}_{\{X \le 5\}}$, que es una Bernoulli de parámetro $p = \mathbb{P}\{X \le 5\} = 1/2$. Así que $4\,\mathbb{F}_4(5)$ sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(n = 4, p = 0.5)$.