Supongamos que la muestra tiene tamaño $n = 50$ y que la distribución de las X_i es una $N(4, 1)$ (i.e., normal con media $\mu = 4$ y desviación típica $\sigma = 1$).

a) Obtener, utilizando la desigualdad de Chebichev, una cota superior para la probabilidad $\mathbb{P}\{|\bar{X} - 4| > 0.3\}$. Al utilizar la desigualdad de Chebichev no estamos usando el hecho de que la distribución de las observaciones es normal: es una desigualdad universal y proporciona una cota (no necesariamente muy ajustada) para $\mathbb{P}\{|\bar{X} - 4| > 0.3\}$, que solo depende de n y de σ.
b) Calcula exactamente la probabilidad $\mathbb{P}\{|\bar{X} - 4| > 0.3\}$ utilizando el hecho de que las X_i tienen distribución $N(4, 1)$. Comparar el resultado con la cota obtenida en (a).

Solución:

a)

$$\mathbb{P}\{|\bar{X} - 4| > 0.3\} \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X})}{0.3^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{0.3^2\ n} = \frac{1}{0.3^2\ 50} = \frac{1}{4.5} \simeq 0.22$$

b) Como $X_1, \ldots, X_{50}$ son v.a.i.i.d. N(4,1), su media muestral $\bar{X}$ también sigue una distribución normal de esperanza 4 y desviación típica $1/\sqrt{50}$. Por tanto, estandarizando la v.a. $\bar{X}$ obtenemos la v.a. $Z = \sqrt{50}(\bar{X} - 4)$, que sigue una distribución N(0,1).

$$\mathbb{P}\{|\bar{X} - 4| > 0.3\} = \mathbb{P}\{\sqrt{50}|\bar{X} - 4| > 0.3\sqrt{50}\} = 2\mathbb{P}\{Z > 2.12\} = 0.034.$$

Observemos que la probabilidad obtenida en (b) es mucho más pequeña que la obtenida en (a). Esto es porque la desigualdad de Chebichev es universal para todas las v.a. de esperanza 4 y varianza 1. En cambio, en (b) se utiliza la información de que la distribución de las variables es normal y, por tanto, tiene unas colas ligeras (la probabilidad de las colas es muy baja).