Algunas distribuciones notables

Antonio Cuevas
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

La distribución normal

Función de densidad:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \mu,\ \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Aplicaciones: Es un modelo muy habitual para la distribución de magnitudes (en física, genética, etc.) que se pueden considerar como la suma de muchos pequeños efectos independientes (TCL). En Estadística aparece como distribución límite de muchos estadísticos que se usan para la inferencia.

La distribución exponencial

Función de densidad:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \ (\theta > 0)$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}, \ \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Aplicaciones: en modelos de fiabilidad (tiempo de espera hasta que se produce una avería en un sistema).

Una propiedad interesante ("falta de memoria"): Si X sigue una distribución exponencial de parámetro θ, se tiene para $a > 0$ y $x > 0$,

$$\mathbb{P}\{X > x + a | X > x\} = e^{-\theta a}$$

(no depende de x).

La distribución gamma

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \ (a > 0, \ p > 0),$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$. Esta función verifica $\Gamma(p) = (p-1)!$ cuando $p \in \mathbb{N}$ y $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{a}, \ \mathbb{V}(X) = \frac{p}{a^2}$$

Aplicaciones: Cuando $p \in \mathbb{N}$ se llama distribución de Erlang y se usa en problemas de fiabilidad (tiempo de espera hasta p fallos), cantidad de lluvia caída, cuantía de las reclamaciones a las compañías de seguro, modelos de supervivencia,.... Para $a = 1/2$ $p = n/2$, con $n \in \mathbb{N}$, se llama distribución χ^2 con n grados de libertad y desempeña un importante papel en Estadística.

La distribución uniforme

Función de densidad:

$$f(x; a, \theta) = \frac{1}{\theta - a}\mathbb{I}_{[a,\theta]}(x), \ (a, \theta \in \mathbb{R}, a < \theta)$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta + a}{2}, \ \mathbb{V}(X) = \frac{(\theta - a)^2}{12}$$

Aplicaciones:

La uniforme se relaciona con otras distribuciones a través de la siguiente propiedad: si X es v.a. con f. de dist. F continua, entonces $Y = F(X)$ tiene distribución uniforme estándar (i.e. con $a = 0$, $\theta = 1$). Esta propiedad se utiliza en los métodos de generación de números (pseudo-)aleatorios: se generan números de una v.a. Y uniforme estándar y se transforman con F^{-1} para obtener observaciones aleatorias con la distribución F.

La distribución beta

Función de densidad:

$$f(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

siendo $a, b > 0$ y Γ la función gamma que aparece en la definición de la distribución del mismo nombre.

Momentos: $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$.

Aplicaciones: Dependiendo de los valores de los parámetros la densidad beta adopta formas muy variadas. Esta distribución (o sus versiones "reescaladas" en otros intervalos diferentes a [0,1]) proporciona un modelo muy flexible para describir variables aleatorias reales de soporte compacto.

La distribución de Weibull

Función de densidad:

$$f(x;\theta,k) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1} e^{-(x/\theta)^k}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x),\ (k>0,\ \theta>0)$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \theta\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right),\ \mathbb{V}(X) = \theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

Aplicaciones:

Tiempos de supervivencia, problemas de fiabilidad en ingeniería, distribuciones de velocidad del viento en ingeniería, de periodos de incubación de algunas enfermedades, etc.

La distribución de Pareto

Función de densidad:

$$f(x; a, \theta) = \theta \frac{a^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{[a,\infty)}(x), \ (a > 0, \theta > 1)$$

Momentos:

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta a}{\theta - 1}, \ \mathbb{V}_\theta(X) = \left(\frac{a}{\theta - 1}\right)^2 \frac{\theta}{\theta - 2}, \text{ si } \theta > 2$$

Aplicaciones:

Distribución de ingresos, de reservas de petróleo, de área quemadas en bosques, de tamaños de ficheros enviados por e-mail, de tamaños de partículas,...

La distribución de Cauchy

Función de densidad:

$$f(x;\theta,a)=\frac{1}{\pi a\left[1+\left(\frac{x-\theta}{a}\right)^2\right]}$$

Momentos: No tiene momentos finitos

Aplicaciones: En el estudio de emisiones de partículas. Si Z es un ángulo aleatorio distribuido uniformemente entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, $tang(Z)$ tiene distribución de Cauchy. El cociente de dos v.a. normales estándar independientes tiene también distribución de Cauchy.

La distribución lognormal

Función de densidad:

$$f(x; m, a) = \frac{1}{xa\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - m}{a}\right)^2} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \ (m \in \mathbb{R}, a > 0)$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = e^{m+\frac{1}{2}a^2}, \ \mathbb{V}(X) = (e^{a^2} - 1)e^{2m+a^2}$$

Aplicaciones: Si X tiene distribución lognormal, $\log X$ tiene distribución normal. Se usa en geología (tamaño de rocas sedimentarias) y en general en aquellos casos en los que una variable puede considerarse producto de muchos factores de pequeño efecto individual.

La distribución de Bernoulli

Función de probabilidad (o "de masa"): Se dice que una v.a. X tiene distribución de Bernoulli de parámetro $p \in [0, 1]$ (y se denota $X \sim B(1, p)$ o bien $X \sim Be(p)$) si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = p, \ \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

Aplicaciones: Experimentos aleatorios "binarios", i.e. con sólo dos posibles resultados.

La distribución binomial

Función de probabilidad: Se dice que una v.a. X tiene distribución binomial de parámetro $p \in [0,1]$ (y se denota $X \sim B(n,p)$) si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = np,\ \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Aplicaciones: Número de éxitos en n pruebas de Bernoulli independientes en cada una de las cuales la probabilidad de éxito es p. La suma de n v.a. independientes con distribución $B(1,p)$ es $B(n,p)$.

La distribución de Poisson

Función de probabilidad: Se dice que una v.a. X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ (y se denota $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \; \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Aplicaciones: Frecuentemente se utiliza como modelo probabilístico para el estudio de fenómenos como el número de "sucesos" (tales como llegadas de clientes a un servicio, llamadas telefónicas a una centralita, accidentes,...) que se producen en un periodo de tiempo prefijado. Aparece como límite de la binomial en el siguiente sentido: Si $X_n \sim B(n, p_n)$ y $np_n \to \lambda > 0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

La distribución binomial negativa

Función de probabilidad: Se dice que una v.a. X tiene distribución binomial negativa de parámetros $p \in [0,1]$ y $r \in \mathbb{N}$ (y se denota $X \sim BN(r,p)$) si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k = r, r+1, r+2, \dots$$

Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p},\ \mathbb{V}(X) = r\frac{1-p}{p^2}$$

Aplicaciones: Es un modelo discreto de "tiempo de espera": En una sucesión de experimentos de Bernoulli con probabilidad éxito p, la distribución del número de pruebas necesarias para obtener r éxitos es $BN(r,p)$. La distribución $BN(1,p)$ se denomina geométrica.