Una pipeta aforada de clase A de 25 ml vierte un volumen medio (o esperado) de 25.00 ml con una desviación típica de 0.03 ml.

a) Se realizan 30 vertidos independientes con la pipeta. ¿Qué distribución sigue el promedio de los 30 vertidos? ¿Qué probabilidad hay de que el promedio esté entre los valores 25 ± 0.01 ml?

b) ¿Cuántos vertidos habría que realizar para que el error del vertido promedio fuese, en valor absoluto, inferior a 0.01 con una probabilidad 0.99?

Solución: X = volumen (en ml) vertido por la pipeta

$$\mu = E(X) = 25 \qquad \sigma = \sqrt{V(X)} = 0.03$$

No suponemos ninguna distribución concreta para X.

a) Los 30 volúmenes vertidos con la pipeta son $X_1, \ldots, X_{30}$. El promedio de los 30 vertidos es $\bar{X} = \sum_{i=1}^{30} X_i/30$ y, por el TCL, sigue aproximadamente una distribución normal de media $\mu = 0.25$ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n} = 0.03/\sqrt{30} = 0.0055$.
La probabilidad pedida es

$$P\{25 - 0.01 < \bar{X} < 25 + 0.01\} \simeq P\{-1.81 < Z < 1.81\} = 0.9298.$$

donde Z denota una N(0,1).

b) El error del vertido promedio es $\bar{X} - \mu = \bar{X} - 25$, donde $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ sigue una distribución N(25,$0.03/\sqrt{n}$) (aproximadamente, por el TCL, si $n \geq 30$). Nos piden determinar n de tal manera que

$$\begin{aligned}
0.99 \qquad &= P\{|\bar{X} - 25| < 0.01\} = P\left\{-\frac{0.01}{0.03/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - 25}{0.03/\sqrt{n}} < \frac{0.01}{0.03/\sqrt{n}}\right\} \\
&= P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{3} < Z < \frac{\sqrt{n}}{3}\right\} = 1 - 2P\left\{Z > \frac{\sqrt{n}}{3}\right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow P\left\{Z > \frac{\sqrt{n}}{3}\right\} = 0.005 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} = 2.575 \Rightarrow n = 59.67
\end{aligned}$$

Habrá que realizar por lo menos 60 vertidos (aproximadamente).