

ESTADÍSTICA
Primer Curso del Grado en Bioquímica (2018/19)

Tema 2: MODELOS DE PROBABILIDAD

2.1. El tiempo X (en minutos) que tarda un isótopo radiactivo de Bismuto-214 en decaer a Polonio-214 sigue una distribución de probabilidad con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}e^{-x/20} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- a) Calcular la mediana y la media del tiempo de vida del isótopo de Bismuto-214.
- b) Determina la probabilidad de que el Bismuto-214 tarde más de 24 minutos en decaer a Polonio-214.
- c) En una muestra con 50 isótopos de Bismuto-214 ¿cuál es la probabilidad de que, al cabo de 24 minutos, hayan decaído más de 40 isótopos?

2.2. El 80 % de los individuos de una población de insectos están infectados con un cierto virus. Se toma una muestra aleatoria de ocho insectos de dicha población. Determinar ...

- a) ... la probabilidad de que exactamente 5 insectos de esa muestra estén infectados con el virus;
- b) ... la probabilidad de que haya más de 5 insectos infectados en la muestra;
- c) ... la probabilidad de que al menos tres insectos estén infectados;
- d) ... el número esperado de insectos de la muestra que estarán infectados.

2.3. En un experimento genético con *drosophila* se hace un cruce en el que se espera que un cuarto de la progenie tenga ojos blancos (*white eyes*, w) y que la mitad tenga el rasgo “queta chamuscada” (*singed bristles*, sn). Supongamos que los dos loci se segregan de manera independiente.

- a) ¿Qué proporción de la progenie tendrá los dos rasgos (w y sn) simultáneamente?
- b) Si se muestrean aleatoriamente cuatro *drosophilas*, ¿cuál es la probabilidad de que todas tengan ojos blancos? ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las cuatro tenga ni ojos blancos ni quetas chamuscadas?
- c) Si se observan dos moscas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una tenga ojos blancos o quetas chamuscadas o ambos rasgos?

2.4. Un 1 % de una cierta población padece un determinado trastorno genético. Una prueba diagnóstica del trastorno detecta correctamente a un individuo enfermo con probabilidad p del 85 % (sensibilidad de la prueba). La prueba da positivo en un 10 % de los casos en que el individuo está sano (falsos positivos).

- a) Si una persona da positivo en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca el trastorno genético?
- b) En un grupo de 5 enfermos con dicho trastorno, ¿cuál es la probabilidad de que la prueba dé positivo por lo menos en tres de ellos?
- c) En un grupo de 200 individuos de la población, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos seis de ellos padezcan el trastorno genético?
- d) En un grupo de 50 afectados por el trastorno genético, ¿cuál es la probabilidad de que como mucho 40 de ellos den positivo en la prueba diagnóstica?

2.5. La probabilidad de que un leucocito sea un linfocito es $3/10$. Se examinan tres glóbulos blancos independientes para ver si son linfocitos.

a) Calcular la probabilidad de cada elemento del espacio muestral (L = linfocito, O = otro):

$$\Omega = \{ LLL, LLO, LOL, OLL, LOO, OLO, OOL, OOO \}$$

b) Determinar la función de masa de la v.a. X = número de linfocitos en tres leucocitos elegidos al azar de forma independiente. Calcular la probabilidad de que X sea por lo menos 2.

c) La proporción de leucocitos de tipo eosinófilo es del 2.3 %. Determinar la probabilidad de que haya por lo menos cinco eosinófilos entre cien leucocitos elegidos al azar de forma independiente.

2.6. El promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. Suponiendo que el número de partículas por milisegundo que pasan por el contador sigue una distribución de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?. ¿Cuál es la probabilidad de que pase alguna partícula por el contador en un milisegundo?

2.7. Un cierto medicamento causa daños en el riñón en el 5 % de los pacientes. Se prueba el medicamento con 80 pacientes. Calcula ...

a) ... la probabilidad de que ninguno de los pacientes experimente daños en el riñón.

b) ... la probabilidad de que por lo menos 6 pacientes sufran daños en el riñón.

c) ... el número esperado de pacientes, de entre esos 80, que sufrirán daños en el riñón.

2.8. Después de 7 días de agregación, se examinan las imágenes al microscopio de 2000 embriones para determinar la medida de su superficie. La probabilidad de que el área de un embrión elegido al azar supere un determinado tamaño crítico es 0.001.

a) Calcular la probabilidad de que las áreas de exactamente tres de los embriones excedan el tamaño crítico.

b) Calcular la probabilidad de que el número de embriones cuya superficie supera el tamaño crítico esté entre 3 y 8 (ambos inclusive).

2.9. Se midió la frecuencia cardiaca en reposo de un grupo de sujetos. Después estos individuos bebieron un vaso de café y diez minutos más tarde se volvieron a medir sus frecuencias cardiacas. El cambio X en la frecuencia cardiaca siguió una distribución normal, con un incremento medio de 7.3 latidos por minuto y una desviación típica de 11.1. Calcular:

a) $P\{X > 5\}$

b) $P\{X > 20\}$

c) $P\{5 < X < 15\}$

d) Calcular el valor c del cambio en la frecuencia cardíaca que experimenta por lo menos el 10 % de los individuos.

2.10. Un estudio publicado en *The Journal of the American Medical Association* defiende que la vitamina E frena moderadamente el declive cognitivo en estadios precoces de la enfermedad de Alzheimer. Los frutos secos contienen una gran cantidad de esta vitamina: los pistachos contienen (aproximadamente) 5.2 mg de vitamina E y las nueces 2.9 mg de vitamina E por cada 100 gramos. Un paciente consume diariamente una cantidad de pistachos dada por una variable normal $P \sim N(\mu_P = 100; \sigma_P = 10)$ y una cantidad de nueces $N \sim N(\mu_N = 150; \sigma_N = 30)$ (ambas en gramos).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este paciente ingiera menos de 115 g de pistachos en un día?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que este paciente ingiera más de 6 mg de vitamina E mediante el consumo de pistachos en un día?

c) Suponiendo que la ingesta de pistachos y de nueces sea independiente, ¿cuál es la probabilidad de que este paciente ingiera más de 6 mg de vitamina E mediante el consumo de pistachos y nueces en un día?

2.11. El color de ojos de un niño lo determina una pareja de genes, uno de cada progenitor. Si $\{b\}$ y $\{B\}$ denotan respectivamente los genes de ojos azules y marrones, entonces el niño puede heredar las siguientes parejas: $\{bb\}$, $\{bB\}$, $\{Bb\}$ y $\{BB\}$. El gen $\{B\}$ es dominante. Un progenitor pasa al descendiente cualquiera de sus dos alelos con la misma probabilidad.

Los padres de Alicia tienen ambos los ojos marrones, pero Alicia tiene ojos azules. La hermana de Alicia tiene los ojos marrones y está embarazada. El futuro papá tiene ojos azules. ¿Cuál es la probabilidad de que el bebé tenga ojos azules?

2.12. Se sabe que el nivel de tensión sanguínea diastólica (en mmHg) en una población es una variable con distribución normal de media $\mu = 87$ y desviación típica $\sigma = 7.5$. Un individuo se clasifica como *hipertenso* si su presión es mayor de 90 mmHg.

- a) Calcula la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar en esta población sea *hipertenso*.
- b) Si se seleccionan aleatoriamente 100 individuos de la población, calcula la probabilidad aproximada de que entre ellos haya más de 40 *hipertensos*.
- c) Calcula el valor aproximado del tercer cuartil de la población, es decir, el valor Q_3 tal que la tensión sanguínea del 25 % de los individuos de la población es mayor que Q_3 .

2.13. Supongamos que la longitud del pétalo en una población de plantas de una ciertas especie sigue una distribución normal de media $\mu = 3.2$ cm y desviación típica $\sigma = 0.8$ cm. ¿Qué proporción de la población se espera que tenga una longitud de pétalo ...

- a) mayor que 4.5 cm?
- b) mayor que 1.78 cm?
- c) entre 2.9 y 3.6 cm?
- d) Si se toman 50 pétalos de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que más de 5 tengan una longitud mayor que 4.5 cm?
- e) Si se toman 50 pétalos de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que más de 15 tengan una longitud entre 2.9 y 3.6 cm?

2.14. Existe una prueba de detección del VIH llamada ELISA (acrónimo del inglés *Enzyme-Linked ImmunoSorbent Assay*) que se utiliza para determinar si la sangre donada está infectada. Cuando hay presencia de anticuerpos, ELISA da positivo con probabilidad 0.997. Cuando la sangre analizada no está contaminada con anticuerpos del VIH, entonces ELISA da positivo con probabilidad 0.015. El objetivo de que un falso positivo se produzca con mayor probabilidad que un falso negativo es intentar eliminar prácticamente la posibilidad de contagiar a un enfermo transfundido.

Supongamos que en cierta población hay un 1 % de los habitantes que tiene anticuerpos del VIH.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba ELISA dé positivo en VIH para una persona elegida al azar en esta población?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea portadora del VIH sabiendo que ha dado positivo en la prueba ELISA?

2.15. Los ratones de la cepa FVB/N son especialmente adecuados para los experimentos transgénicos y los ulteriores análisis genéticos. En un estudio publicado en *Comparative Medicine* se analizaron las características bioquímicas hematológicas y séricas de referencia en ratones FVB no transgénicos. Supongamos que el nivel de leucocitos (en k/uL) en un macho no transgénico FVB/N sigue una distribución normal de media 7.5 y desviación típica 2.4 y que la misma variable en una hembra no transgénica de dicha cepa sigue una normal de media 9.3 y desviación típica 2.8.

- a) Calcular el porcentaje de machos FVB/N cuyo nivel de leucocitos es inferior a 7 k/uL.
- b) Calcular la probabilidad de que el nivel de leucocitos en un macho sea inferior al de una hembra.