Seminario de Análisis y Aplicaciones

Jueves, 9 de junio de 2011

15:30 h., Módulo 17 (antiguo C-XV) - Aula 520 (Depto. Matemáticas UAM)

Ursula Molter

Universidad de Buenos Aires – Argentina

Modelos óptimos para muestreo y dispersión

Resumen: Dado un conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, consideramos la siguiente pregunta: ¿Existe un subespacio de dimensión k con $k << m$ de forma que todas las funciones pertenezcan a ese subespacio?

O mas generalmente, ¿existe un subespacio de dimensión k con $k << m$ de forma que todas las funciones estén cerca de ese subespacio? o más aún: ¿Existen subespacios de dimensión a lo sumo k de manera que todas las funciones estén cerca de la unión de esos subespacios?

El problema consiste en demostrar la existencia de una colección de tales subespacios. Este problema está íntimamente relacionado con la emergente teoría de Muestreo Comprimido que propone reconstruir un vector $x \in \mathbb{R}^N$ (N típicamente muy grande) a partir de muy pocas mediciones de x. Con esta generalidad, el problema está claramente mal-planteado, pero comienza a tener sentido si se asume que x es disperso en alguna base.

En esta charla introduciremos el concepto de $(\ell; k)$-dispersión, o sea que existen ℓ subespacios de dimensión menor o igual a k, de forma que las funciones de nuestra clase pertenezcan a la unión de estos subespacios. En caso en que los datos (las funciones) no sean $(\ell; k)$-dispersos, intentaríamos hallar el mínimo valor de $\epsilon > 0$ tal que exista un tal conjunto de subespacios, con un error de aproximación no mayor de ϵ.

Sorpresivamente con técnicas relativamente elementales de Álgebra Lineal, uno puede proveer una solución a este problema.

El planteo del problema generalmente está hecho en un espacio de Hilbert de dimensión N, donde N es un entero muy grande (o infinito). Y la pregunta es si se pueden encontrar subespacios de dimensión k con una cierta propiedad cuando $k << N$. Es entonces natural preguntarse si no se puede reducir el problema original a un espacio de dimensión más pequeña, resolverlo allí y luego de alguna manera conseguir la solución en el espacio original.

Como mostraremos en esta charla, sorpresivamente esto es posible, y mostraremos como se relaciona el error que se comete en el problema reducido con el error que uno está buscando.

ICMAT CSIC-UAM-UC3M-UCM
Departamento de Matemáticas. U.A.M.