

Propuesta de Trabajos Fin de Grado, curso académico 2024-25

PROFESOR: Fernando Chamizo Lorente

Número máximo de TFG que solicita dirigir: 4

1.- TEMA: **La función ζ de Riemann**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: En el trabajo se tratarán diferentes aspectos analíticos y aritméticos de la función del título. Entre ellos, la continuación analítica, la ecuación funcional, la asintótica de los ceros, valores especiales, fórmulas de sumación asociadas y la relación con los números primos.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada con Teoría Combinatoria y Analítica de Números y con Variable Compleja II.

Bibliografía/referencias:

- Davenport, H. Multiplicative number theory. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York, 2000.
- Ivic, A. The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- Iwaniec, H. Lectures on the Riemann zeta function. University Lecture Series, 62. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- Titchmarsh, E. C. The theory of the Riemann zeta-function. Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

2.- TEMA: **Las sumas de Gauss en matemáticas y física**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: Las sumas de Gauss están ligadas a la reciprocidad cuadrática y otros temas aritméticos. Lo que es menos conocido, es que también aparecen en temas de física matemática, sobre todo a través de la ecuación de Schrödinger. El propósito del trabajo es analizar con cierto detalle algunos ejemplos, tanto de física como de matemáticas, en los que las sumas de Gauss desempeñan un papel importante.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada con Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, con Teoría Combinatoria y Analítica de Números y con Variable Real.

Bibliografía/referencias:

- Berry, M. V. and Klein, S. Integer, fractional and fractal Talbot effects. *J. Mod. Opt.* 43 2139-64 (1996).
- de la Hoz, F.; Vega, L. Vortex filament equation for a regular polygon. *Nonlinearity* 27 (2014), no. 12, 3031-3057.

- Dym, H.; McKean, H. P. Fourier series and integrals. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- Oskolkov, K. I. The Schrödinger density and the Talbot effect. In Approximation and probability, volume 72 of Banach Center Publ., pages 189-219. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2006.

3.- TEMA: **Problemas de puntos del retículo**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: En breve, los problemas de puntos del retículo consisten en contar aproximadamente puntos de coordenadas enteras. El trabajo se centrará en el uso de métodos analíticos para contar puntos del retículo en ciertas regiones de dos o más dimensiones. También se abordará el caso de puntos capturados por algunas curvas.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada con Variable Real y con Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Cilleruelo, J.; Córdoba, A. La teoría de los números. Mondadori 1991.
- Huxley, M. N. The area within a curve. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 97 (1987), no. 1-3, 111-116 (1988).
- Ivic, A.; Krätzel, E.; Kühleitner, M.; Nowak, W. G. Lattice points in large regions and related arithmetic functions: recent developments in a very classic topic. *Elementare und analytische Zahlentheorie*, 89-128, Schr. Wiss. Ges. Johann Wolfgang Goethe Univ. Frankfurt am Main, 20, Franz Steiner Verlag Stuttgart, Stuttgart, 2006.
- Varberg, D. E. Pick's theorem revisited. *Amer. Math. Monthly* 92 (1985), no. 8, 584-587.

4.- TEMA: **Álgebra, geometría, aritmética y física de los cuaterniones**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: Siguiendo los temas indicados en el título se estudiarán los cuaterniones como álgebra normada no conmutativa, en conexión con el grupo de Lie de rotaciones, en relación con la representación de enteros como suma de cuatro cuadrados y como alternativa al álgebra del espín dada por las matrices de Pauli.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada muy levemente con Álgebra Conmutativa.

Bibliografía/referencias:

- Chamizo, F.; Jiménez-Urroz, J. Extendable orthogonal sets of integral vectors. *Res. Math. Sci.* 9 (2022), no. 4, Paper No. 59, 13 pp.

- Kantor, I. L.; Solodovnikov, A. S. Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras. Translated from the Russian by A. Shenitzer. Springer-Verlag, New York, 1989.
- Pauli, W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Z. Physik* 43 (1927) 601-623.
- Weiner, J. L.; Wilkens, G. R. Quaternions and rotations in E4. *Amer. Math. Monthly* 112 (2005), no. 1, 69-76.

5.- TEMA: **Sumas e integrales oscilatorias**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: El tema principal es un estudio de sumas e integrales trigonométricas basado sobre todo en el principio de fase estacionaria y mencionando algunas aplicaciones. También se entrará en algunas consideraciones más algebraicas y aritméticas, así como en otras geométricas sobre la representación gráfica de sumas parciales oscilatorias.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Variable Real y Teoría Combinatoria y Analítica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Duke, W.; Garcia, S. R.; Lutz, B. The graphic nature of Gaussian periods. *Proc. Amer. Math. Soc.* 143 (2015), no. 5, 1849–1863.
- Graham, S. W.; Kolesnik, G. van der Corput's method of exponential sums. London Mathematical Society Lecture Note Series, 126. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- Huxley, M. N. On stationary phase integrals. *Glasgow Math. J.* 36 (1994), no. 3, 355–362.
- Montgomery, H. L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

6.- TEMA: **La aritmética de las formas cuadráticas**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: El objetivo es cubrir parte de la teoría de Gauss de formas binarias desde un punto de vista moderno, con ideales en anillos de enteros, y, mínimamente, algo de las formas ternarias. También se explorará la conexión con la geometría del semiplano superior y, si el tiempo lo permite, con funciones elípticas y modulares.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada con Teoría Algebraica de Números.

Bibliografía/referencias:

- Cassels, J. W. S. Rational quadratic forms. Courier Dover Publications, 2008.

- Cohn, H. Advanced number theory. Dover Publications Inc., New York, 1980.
- Cox, D. A. Primes of the form x^2+ny^2 . John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.
- Gauss, C. F. Disquisitiones arithmeticae. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated and with a preface by A. A. Clarke, Revised by W. C. Waterhouse, C. Greither and A. W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse.

7.- TEMA: **El momento angular en física cuántica**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: Tras una introducción a la mecánica cuántica básica, se estudiarán las propiedades del operador momento angular orbital y su relación con los armónicos esféricos. Se complementará también con el espín, como momento angular intrínseco. También se puede entrar en la relación con la teoría matemática de representaciones.

Requisitos: Ninguno.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Ligeramente relacionada con Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Análisis Funcional y Variable Real.

Bibliografía/referencias:

- Chamizo, F. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas).
<http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/qf.pdf>.
- Konishi, K. and Paffuti, G. Quantum mechanics. A new introduction. Oxford University Press, Oxford, 2009.
- Ynduráin, F. J. Mecánica cuántica: teoría general. Ariel, Barcelona 2003.
- Zwiebach, B. *8.06 Quantum Physics II*. Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: Creative Commons BY-NC-SA.

8.- TEMA: **Aspectos matemáticos del tratamiento de señales**

Válido para 1 **alumno**.

Resumen/contenido: Este trabajo tendrá tanto una componente teórica como otra computacional. Se utilizará de manera práctica el análisis de Fourier discreto, el continuo y las wavelets aplicando estas áreas al tratamiento de señales, al tiempo que se estudian algunos de sus aspectos fundamentales. El plan incluye elaborar código en Matlab/Octave.

Requisitos: Ninguna.

Asignaturas de cuarto relacionadas/compatibles: Relacionada con Variable Real y muy levemente con Métodos Numéricos para EDP.

Bibliografía/referencias:

- Brémaud, P. Mathematical principles of signal processing. Springer-Verlag, New York, 2002. Fourier and wavelet analysis.
- Chamizo, F. A course on signal processing. 2020. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/libreria.html>.
- Gonzalez, R. C. and Woods, R. E. Digital image processing. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ., third edition, 2008.
- Pinsky, M. A. Introduction to Fourier analysis and wavelets. Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002.