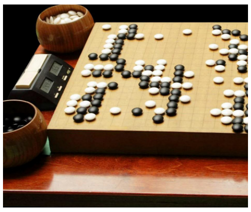


"Héroe es el que hace lo que puede. Los demás no hacen ni eso."
Romain Rolland

La hoja volante

Número 19. Diciembre 2009.
http://www.uam.es/hojavolante

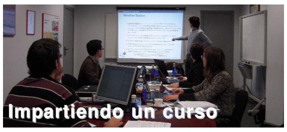
Y después ¿qué?

por Lucas García Rodríguez

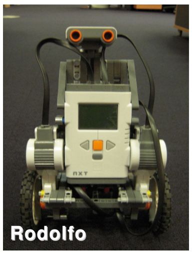
De algún modo u otro, todos nos terminamos formulando esta pregunta unas cuantas veces en la vida: cuando elegimos estudiar una carrera, cuando la terminamos, cuando decidimos seguir estudiando o cuando buscamos nuestro primer trabajo. Las respuestas que nos damos condicionan el estado en el que nos encontraremos cuando nos formulemos la pregunta de nuevo, y así sucesivamente. Sin duda todas las respuestas son importantes, algunas las consideraremos como más acertadas, otras menos, pero todas nos habrán ayudado a definirnos mejor.


Lucas

Mi primera respuesta a la pregunta fue Matemáticas. Había terminado los estudios de bachillerato y estaba pendiente de examinarme de selectividad. Pero ya hacía muchos meses que tenía clara la respuesta. Mi atracción por las matemáticas empezó desde pequeño y fue creciendo a medida que tenía que estudiar otras asignaturas de memoria. Así que en 2001 empezaba la carrera de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid (UAM).


Impartiendo un curso

Mi paso por la universidad fue de lo más corriente, algunas asignaturas me costaban menos, en otras tenía que poner más esfuerzo, pero poco a poco iba avanzando hasta que en 2005 terminé la carrera y la pregunta surgía de nuevo. Y ahora, ¿qué? Mientras lo decidía, realicé unas prácticas de empresa en el Departamento de Biodiversidad y Biología Evolutiva del Museo Nacional de Ciencias Naturales -dependiente del CSIC- donde, junto con un compañero de la carrera, realizamos un programa capaz de explicar la distribución geográfica de las especies a partir de pocas observaciones (conclusión del proyecto: no hay elefantes en Dinamarca).


Rodolfo

¿Y después? ¿El doctorado? En octubre de 2005 comencé ilusionado los cursos de doctorado en la UAM. Meses después los abandonaría por una beca de postgrado en el Instituto Nacional de Estadística (INE), donde serviría de enlace metodológico entre el INE y Eurostat (la Oficina Estadística Europea) durante todo 2006.

En septiembre de ese año, decidí llenar mi tiempo libre con un máster en Ingeniería Matemática en la Universidad Complutense de Madrid. No fue hasta esta etapa cuando me di realmente cuenta de la gran cantidad de industrias en las que hacen falta matemáticos. Terminado el máster, volví a tener la pregunta encima de la mesa. No me costó mucho tomar una decisión una vez escuché la propuesta de Indizen Technologies, una pequeña y creativa consultoría tecnológica, donde trabajaría en un proyecto para la gestión del riesgo de mercado y crédito del Banco Santander.

Un año después de entrar en Indizen, recibí la llamada de The MathWorks, el fabricante de MATLAB. Buscaban un matemático que dominase su lenguaje de programación para encargarse del Departamento de Formación en España y Portugal. Yo conocía MATLAB desde antes de empezar la carrera, durante ella había hecho una gran cantidad de prácticas y ejercicios con este lenguaje y me fascinaba la idea de poder trabajar en la empresa que lo había creado. En abril de 2008 comencé a trabajar en la sede de The MathWorks en Madrid como ingeniero de formación y responsable de los servicios de formación en España y Portugal. Mis funciones eran y siguen siendo las de impartir cursos de formación en MATLAB, Simulink y el resto de herramientas a los usuarios de los productos de The MathWorks. Para ello, lo primero que tenía que hacer era formarme en los productos que desconocía, asistir a cursos para adquirir la habilidad de hablar en público y estudiar técnicas para ser un buen formador. Todo esto lo realizaría durante el verano de ese año en la sede central de la empresa en Natick, Massachusetts (un pueblo a 35 km. de Boston). Además, iba a tener que seguir poniéndome al día, pues mi trabajo exige un continuo estudio en matemáticas e ingeniería para poder así dirigir e interpretar los problemas que plantean las empresas.

The Mathworks

Hoy en día, cuando ya ha pasado más de un año y medio desde que entré en The MathWorks y tras impartir una gran variedad de cursos en empresas y universidades, he comprobado que somos muchos matemáticos trabajando (y utilizando MATLAB) en numerosos sectores e industrias; diseñando componentes para aeronaves, simulando el comportamiento de un aerogenerador, prediciendo la demanda de energía para los próximos 5 minutos o impartiendo cursos de formación. Y todos tenemos un después qué.

¿Sabías que...?

De vez en cuando, uno experimenta la maravillosa sensación de descubrir algo que había tenido delante todo el tiempo. Quizá la siguiente información te haga revivir esta sensación una vez más. En la hoja volante número 8 (febrero de 2006), el dibujo de la esquina superior izquierda de la portada fue una bola de billar con el número 8. A partir de febrero de 2007, la costumbre de relacionar la imagen con el número de la revista quedó instaurada (un kiosco de la ONCE, un reloj, la bola 13, un 14 en el asfalto, 15 girasoles, un cuadrado mágico 4 x 4, las comunidades autónomas de España, los míticos dos rombos...). Hasta hoy era una especie de "chiste privado". A partir de ahora, podrás pasar a formar parte de la ilustre lista de personas que sugirieron un dibujito para "La hoja volante". Te proponemos que envíes una imagen (propia o libre de derechos, citando la fuente en caso de no ser tuya) o simplemente una idea para la imagen, que tenga que ver con cada número de la hoja. Si tu idea es la mejor, pondremos tu imagen. Si nos gustan más nuestras ideas, podrás insultarnos por nuestro dudoso gusto. Por cierto, sí, un tablero de Go tiene 19 x 19 líneas. ¿Sugerencias para el número 20?

Envía tus propuestas a: hojavolante@uam.es.

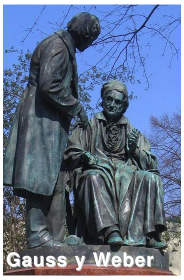
Erasmus en Goettingen

por Patricia Gutiérrez del Álamo

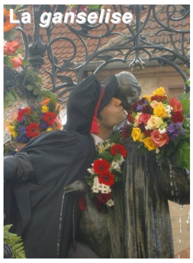
Routine, routinier, rotina, rutina... ¿os suena alguna de estas palabras? Pues ya podéis ir olvidándolas porque en el "vocabulario Erasmus" no existen; os las podéis dejar en Madrid. La vida de "un Erasmus" está llena de novedades y sorpresas. Cada día te ocurre algo distinto: conoces a una nueva persona, descubres un nuevo bar, pruebas una comida distinta o tienes un nuevo problema con la lavadora... ¡No podéis imaginar la cantidad de detergentes y suavizantes que existen!

Es cierto eso que dicen de que los primeros días se pasa un poco mal... Pero, siendo sinceros ¿quién se acuerda de esos primeros momentos cuando ya formas parte de una ensalada de nacionalidades? Viviendo cada día de una manera especialmente intensa en un lugar que no sólo te permite conocer un nuevo idioma sino también introducirte en un país y una cultura a fondo. También es verdad que las pequeñas tareas de cada día, esas de las que no somos conscientes aquí, se te plantean como un reto. Pero no desesperemos. Además ¿se os ocurre una manera mejor de aprender a cocinar? Rodeado de todos tus vecinos, intercambiando recetas y como excusa para reuniros todos y luego salir a tomar algo...

París, Bruselas, Ámsterdam, Berlín, Roma, Viena, Milán, Helsinki y muchas otras son las plazas que nos ofrecen. Yo elegí la universidad de Goettingen, donde, por si no lo sabéis, fueron profesores Gauss, Hilbert, Klein y muchos otros matemáticos. De hecho algunos de ellos están enterrados en esta ciudad con algo característico de sus descubrimientos escrito en sus lápidas. Aunque eso no lo revelaré para animaros a hacer una visitilla a esta ciudad, una visita muy recomendada para cualquiera.


Gauss y Weber

Una de las cosas más curiosas que me encontré por allí es la estatua de *la ganselise* (la "señora de los gansos"). La tradición manda que, una vez terminado el doctorado, recorras toda la ciudad con un carro lleno de flores y haciendo el mayor ruido posible (para que todos se enteren de que por fin has acabado), llegues a esta estatua, la adornes con todas las flores y le des un beso en la mejilla, convirtiéndola así en la mujer más besada del mundo. Otra de las cosas bastante típicas que se suelen hacer alrededor de esta estatua es beber el "Glüwein", un vino caliente hecho con azúcar, vainilla, y canela. Puede sonar un poco raro, pero se agradece tomar algo caliente cuando hace tanto frío.


La ganselise

Hay millones de detalles que me gustaría seguir contando, no sólo sobre la ciudad, sino también sobre una historia que, como dice Xavier en la película *Una casa de locos* (si no la has visto ¿a qué esperas?), "empezó cuando el avión despegó, pero no es una historia de aviones ni de despegues. Aunque sí, es un despegue". Como decía, es muy difícil resumir una experiencia que se podría describir con tantos y tan variados adjetivos, así que os propongo que seáis vosotros mismos los que la viváis y la consigáis definir. Pero desde luego, sí que sé un adjetivo que no define la "experiencia Erasmus": rutinaria. Routine, routinier, rotina, rutina... ¿os suena alguna de estas palabras? Pues ya podéis ir olvidándolas...

El plazo de solicitudes para la convocatoria Erasmus 2010-2011 concluye el próximo martes 15 de diciembre (más información en: http://www.uam.es/oriciencias). El Departamento de Matemáticas tiene convenios con las mejores universidades europeas. También existe la posibilidad de acceder a dobles titulaciones con Paris-Dauphine y están en preparación avanzada otros acuerdos con Paris 6 (Pierre et Marie Curie) y Paris 13. Para facilitar estos intercambios se ofrecerá a partir de enero un curso de "francés para matemáticos".

Erasmus en Bruselas

por Rosa Aguirre Esparza

Estuve de Erasmus en Bruselas el curso pasado en la ULB (Université Libre de Bruxelles). Cuando llegué allí el 15 de septiembre estaba muerta de miedo. Sola en una ciudad que no conocía y sin saber casi francés. Lo único que tenía reservado era una cama en un albergue para dormir la primera noche. En esos momentos pensaba en por qué me había ido allí, si yo estaba tan a gusto en Madrid.

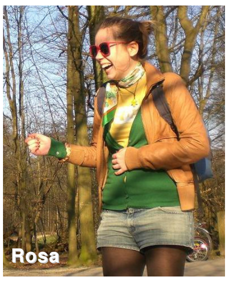

El Manneken Pis

Lo primero que hice fue buscar piso e irme a conocer la universidad. Allí me hablaron de una asociación de estudiantes en intercambio y me fui directa para la oficina, a ver qué me contaban. Resulta que organizaban una fiesta esa misma noche. No lo dudé y me planté en la fiesta. Allí estaba todo el mundo en la misma situación que yo. Todo el mundo se te presentaba y esa misma noche, la segunda noche que pasaba en Bruselas, conocí al que llegó a ser uno de mis mejores amigos allí. Todos estábamos en la misma situación, solos , así que en cuanto hablabas 10 minutos ya te pasabas el teléfono, etc.

Los días siguientes empecé a quedar con toda esa gente que fui conociendo. Como es normal, no me llevé igual de bien con todo el mundo pero para mediados de octubre ya había conocido a un montón de gente. Muchos de ellos se convirtieron en lo que llamo "mi familia belga", y de vuelta siguen y seguirán siendo mis grandes amigos.

Entiendo que irte a otro país de primeras no te apetezca demasiado pero creo que esa sensación es provocada por el miedo.

No sólo conoces gente y haces un montón de amigos. Además, aprendes a vivir tú sola, sin tener a tu madre detrás cuidándote y arreglando todo lo que vayas liando.


Rosa

Definitivamente "el Erasmus" es una oportunidad para crecer como persona y conocerte a ti misma. Conoces una nueva cultura que te llega a encantar, y aprendes a aceptar cosas que igual antes no aceptarías o te parecerían fatal. Aprendes otro idioma y te relacionas con gente que igual en tu ámbito normal (en casa) nunca te relacionarías. Maduras un montón, estás tú sola y no te queda otra.

Personalmente no creo que haya nada malo, hay que mirar lo positivo de estar en Europa y también puedes aprovechar para viajar un montón. Es una pasada, los trenes te llevan en un momento a todos los lados. Yo entre otros sitios estuve en Ámsterdam, Londres, París...

En cuanto a la universidad, me pareció una pasada el nivelazo que tenían los belgas. Yo tenía asignaturas de todos los cursos, por lo que fue un poco odisea, pero la gente era supersimpática, siempre hacían lo que fuera para ayudarme: pasarme apuntes y ejercicios resueltos e incluso resolverme dudas. Especialmente me encantó dar clases con ciertos profesores. Aunque fuese otro idioma, las matemáticas son iguales en todo el mundo. En cuanto pilles los 10 tecnicismos necesarios no es tan difícil estudiarlas. Hay que aprovechar eso de nuestra carrera.

Llegó junio y no me podía creer que hubiesen pasado ya diez meses, diez de los mejores de mi vida. No me quería volver, quería seguir disfrutando de la cultura belga y sobre todo no quería separarme de la gente con la que había vivido y compartido mi gran año.

No sé que más decir, solo tengo recuerdos positivos. Sea lo que sea lo que pones de excusa para no irte, pide la beca y vete de Erasmus, no te arrepentirás. Aun no conozco a nadie que me diga "no al Erasmus" después de haberlo vivido. Pide la beca, que no pierdes nada.

La paradoja del segundo as

Interpretando problemas

por José A. Prado-Bassas

Supongamos que tenemos una baraja francesa (52 cartas con picas, corazones, diamantes y tréboles) y distribuimos las cartas aleatoriamente en 4 montones (de 13 cartas). Alguien (vamos a llamarlo el interlocutor) levanta un mazo, lo mira al completo y dice lo siguiente:

En este mazo hay un as.

Inmediatamente nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que en ese mismo mazo haya un segundo as?

Antes de responderla vamos a variar ligeramente la situación. Volvemos a barajar el mazo y a distribuir las 52 cartas en 4 montones de 13. Nuestro interlocutor vuelve a levantar un mazo y, tras observar todas las cartas, dice lo siguiente:

En este mazo está el as de picas.

De nuevo volvemos a hacernos la misma pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que en ese mismo mazo haya un segundo as?

Aparentemente podríamos pensar que la situación es exactamente idéntica y que el hecho de "marcar" una carta en el segundo de los casos no debería alterar la probabilidad solicitada. Pero esto es un error. Un análisis extremadamente detallado dice que la respuesta a la primera pregunta es 5359/14498, que aproximadamente resulta en un 37% de posibilidades de que en haya un segundo as. Sin embargo, en la situación en la que el as del mazo está "marcado" la probabilidad resulta ser 11686/20825, aproximadamente un 56%.

Ponerse a realizar estos cálculos es realmente una tarea tediosa (de hecho, nuestros números están extraídos del libro *"¡Ajá! Paradojas que hacen pensar"* de Martin Gardner). Pero podemos reducir la cuestión a un caso mucho más simple y que permitirá al lector (y a este humilde escritor) realizar los cálculos "a mano".

Vamos a suponer que tenemos 4 cartas (as de picas, Ap; as de tréboles, At; un "jack" cualquiera, J; y una dama cualquiera, Q) y las repartimos en 2 mazos de 2 cartas. Vamos a ver las posibles parejas que puede haber en cada mazo:

1. Ap - At	2. Ap - J	3. Ap - Q
4. At - J	5. At - Q	6. J - Q

De nuevo, damos a nuestro interlocutor uno de los mazos. Si ahora nos dice

En este mazo hay un as,

un observador externo sabría que hay 5 casos posibles para el mazo (los 5 primeros) pero sólo 1 caso favorable para que tenga el segundo as. Por lo tanto, la probabilidad de que tenga el segundo as es de 1/5, es decir, del 20%. Sin embargo, si el interlocutor afirma que

En este mazo está el as de picas,

sabremos que tan sólo hay 3 posibilidades para este mazo (las 3 primeras) y que sólo en una de ellas hay un segundo as. Es decir, la probabilidad, ahora, es de 1/3 o un 33'3%.

Pero aquí hay más de lo que hablar. En nuestro planteamiento hemos estado suponiendo (aunque quizás no de forma explícita) que el interlocutor mira todas las cartas del mazo (de hecho, suponemos que coge un mazo y mira todas sus cartas: si hay un as lo dice y si no volvemos a iniciar el proceso de barajado y reparto). La situación cambia si el interlocutor va mirando las cartas una a una y, en cuanto ve un as, habla. Veámoslo con otro ejemplo aún más simple.

Vamos a suponer que sólo disponemos de 3 cartas (as de picas, Ap; as de tréboles, At; y un "jack" cualquiera, J) y que elegimos 2 al azar y se las damos al interlocutor. Obviamente, habrá 3 posibles combinaciones: Ap - At, Ap - J y At - J. Luego la probabilidad de que le hayamos dado los dos ases es 1/3.

Supongamos que el interlocutor mira sólo una de esas dos cartas (elige al azar la que mira) y dice (si es el caso):

Esta carta es un as.

Ahora, la probabilidad de que la otra carta sea un as es del 50%: puede ser J o el otro as (sea el que sea el que haya visto). Si el interlocutor repite la operación y asegura (si es así el caso):

Esta carta es el as de picas,

la probabilidad de que la segunda carta sea el otro as es, de nuevo, del 50%; puede ser el as de trébol o el "jack".

Sin embargo, esta no es la situación que estábamos planteando. En nuestro caso, el interlocutor miraba las 2 cartas y aseguraba:

En este mazo hay un as.

Evidentemente, esta frase ahora no nos dice absolutamente nada, pues en los 3 casos posibles, el mazo que tenga tendrá al menos 1 as, por lo que la probabilidad de que le hayamos dado los 2 ases es de 1/3. Mientras que si el interlocutor nos dice:

En este mazo está el as de picas

entonces sabremos que la pareja At - J no es la que tiene, por lo que la probabilidad de que le hayamos dado los dos ases es del 50%.

Como podréis comprobar, en los problemas de probabilidad hay que estar siempre muy seguros de la interpretación que les damos, pues, aun en los casos más simples, únicamente la forma de elegir puede dar lugar a varias interpretaciones de un mismo problema que nos lleven a soluciones distintas.

Este artículo es una versión de "la paradoja del segundo as" del blog *Tito Eliatron Dixit* (http://eliatron.blogspot.com/2009/02/la-paradoja-del-segundo-as.html) con algunas aportaciones extraídas de los comentarios del blog. Referencia: "*¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*", de Martin Gardner ("Desconcertantes loritos").

Respuesta al acertijillo anterior

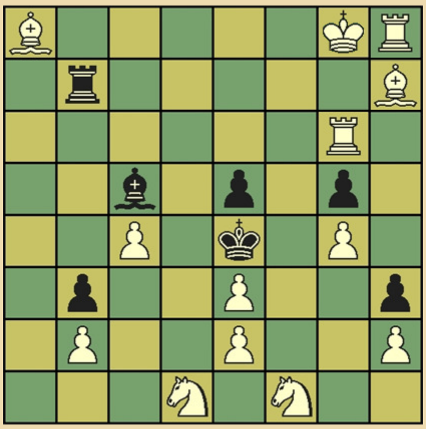
Se descolgaba un reloj de pared y se colgaba boca abajo. Se pedía: ¿Cuándo darán la hora correcta las agujas del reloj? ¿Cuáles son las horas "con sentido" que marca el reloj al revés? Y, por último, si en lugar de dar la vuelta al reloj, lo miramos en un espejo. ¿Cuándo dará este reloj la hora correcta y qué horas "con sentido" puede marcar?

La aguja de las horas de un reloj determina la hora exacta (la de los minutos no es más que una ayuda para que podamos ser más precisos con menos esfuerzo). Por lo tanto, si tenemos cierta hora en el reloj y lo giramos 180º es imposible que tengamos la misma hora, así que el reloj "al revés" nunca marcará la hora correcta. De hecho, si nos fijamos en el reloj a una hora cualquiera, la situación de la aguja de las horas entre las dos "marcas de horas" más cercanas, determina la posición en la que está la aguja de los minutos. Así, si giramos el reloj 180º, la situación de la aguja de las horas entre las dos "marcas de horas" más cercanas no variará, mientras que la aguja de los minutos habrá girado 180º. Eso quiere decir que el reloj al revés siempre da horas "sin sentido". En cuanto al reloj reflejado en el espejo, el mismo razonamiento de que la aguja de las horas detemina la hora, nos lleva a que solamente dará la hora correcta a las 12:00 y a las 6:00. Por otro lado, todas las horas que marca el reloj reflejado tienen sentido, pues al reflejar el reloj la aguja de las horas pasa de "menos x" a "y x" y la de los minutos también.

Enhorabuena a Alejandro Álvarez por su respuesta.

El acertijillo

Karl Fabel, problemista de ajedrez alemán, proponía hace ya unos cuantos años el siguiente original problema: Las blancas mueven y no dan jaque mate inmediato.



Respuestas a: hojavolante@uam.es.

Respuesta al problema anterior

Evaristo Pi tenía un número tal que al multiplicarlo por la puntuación obtenida al lanzar un dado nos daba como resultado un número distinto que coincidía con el primero cuando se escribían sus dígitos en sentido contrario. Y queríamos deducir la puntuación que había salido en el dado. Llamamos n al número obtenido en el dado, y a y b respectivamente a la primera y la última cifra del número de Evaristo Pi, que llamaremos $e = a...b$. Vamos a ir descartando valores de n:

- n no puede ser 1, pues $1 \cdot e = e$, cosa que no permite el enunciado.
- n no puede ser 6, pues eso obliga a que $a = 1$ y $6 \cdot 1...b$ es múltiplo de 6, por lo que no puede acabar en 1.
- n no puede ser 5, pues eso obliga a que $a = 1$ y $5 \cdot 1...b$ es múltiplo de 5, por lo que no puede acabar en 1.
- n no puede ser 2, pues eso obliga a que $a = 1, 2, 3$ o 4. En el primer caso, $2 \cdot 1...b$ va a ser par, por lo que no puede acabar en 1. En el segundo, $2 \cdot 2...b$ va a comenzar por 4 o por 5, y para que este número sea igual a $b...2$, necesitamos que $2 \cdot 4$ o $2 \cdot 5$ acabe en 2, cosa que no ocurre. En el tercero, $2 \cdot 3...b$ va a comenzar por 6 o por 7, y para que este número sea igual a $b...3$, necesitamos que $2 \cdot 6$ o $2 \cdot 7$ acabe en 3. En el cuarto, $2 \cdot 4...b$ va a comenzar por 8 o por 9, y para que este número sea igual a $b...4$, necesitamos que $2 \cdot 8$ o $2 \cdot 9$ acabe en 4.
- n no puede ser 3, pues eso obliga a que $a = 1, 2$ o 3. En el primer caso, $3 \cdot 1...b$ va a comenzar por 3, 4 o 5, y para que este número sea igual a $b...1$, necesitamos que $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$ o $3 \cdot 5$ acabe en 1. En el segundo, $3 \cdot 2...b$ va a comenzar por 6, 7 u 8, y para que este número sea igual a $b...2$, necesitamos que $3 \cdot 6$, $3 \cdot 7$ o $3 \cdot 8$ acabe en 2. En el tercero, $3 \cdot 3...b$ va a comenzar por 9 y para que este número sea igual a $b...3$, necesitamos que $3 \cdot 9$ acabe en 3.

Así, n tiene que ser 4. En este caso $a = 1$ o 2. Si $a = 1$ entonces $4 \cdot 1...b$ va a comenzar por 4, 5, 6 o 7, y para que este número sea igual a $b...1$, necesitamos que $4 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $4 \cdot 6$ o $4 \cdot 7$ acabe en 1, cosa que no sucede. Si $a = 2$, entonces $4 \cdot 2...b$ va a comenzar por 8 o 9. En el segundo caso necesitamos que $4 \cdot 9$ acabe en 2. En el primero, necesitamos que $4 \cdot 8$ acabe en 2, cosa que sí ocurre. Sabemos que el número de Evaristo tiene que ser de la forma 2...8. Un posible número sería 2178, pues $4 \cdot 2178 = 8712$. Luego el número del dado es el 4. Enhorabuena a Alejandro Álvarez por su respuesta "casi correcta" y ánimo para la próxima a Jorge Enrique Salgado y Alejandro Llorente que escribieron "cosas raras"...

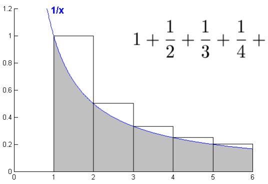
El problema

Mi primo de La Coruña me ha dicho que tiene un número de 10 cifras en el que todas las cifras son distintas apuntado en un papel. Sus dos últimas cifras forman un número divisible entre 2, sus 3 últimas cifras forman un número divisible entre 3, sus 4 últimas cifras un número divisible entre 4, y así sucesivamente... sus 9 últimas cifras forman un número divisible entre 9 y sus 10 últimas cifras forman un número divisible entre 10 (es decir, el número completo es divisible entre 10). Además, si ignoramos el 0, las otras 9 cifras dan el teléfono de mi primo. ¿Cuál es el número de 10 cifras que ha apuntado mi primo?

Agradecemos la colaboración de Pablo Angulo, que ayudó en la ardua tarea de llamar a todos los teléfonos de España sin cifras repetidas. Respuestas a: hojavolante@uam.es.

Euler-Mascheroni y las cartas en equilibrio

Recuerda el número 6 de "La hoja volante". Allí dábamos dos demostraciones distintas que la serie armónica diverge: una de Pietro Mengoli y una prueba visual. En esta última comparábamos la serie con la integral de la función $1/x$.



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots > \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

Pero no solamente es cierta la desigualdad, sino que la integral y la suma están muy cercanas para n grande. Es decir, podemos definir gamma:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right)$$

y es muy fácil ver que este límite existe y es finito (es, por ejemplo, consecuencia de que una sucesión creciente y acotada superiormente converge).

Esta constante, gamma = 0,577215..., fue señalada por Euler como digna de seria atención y hace apariciones sorpresivas de cuando en cuando. Lorenzo Mascheroni (1750-1800) computó gamma con 32 cifras decimales. Más tarde, Soldner publicó un nuevo valor de gamma que difería en el vigésimo decimal. Gauss solicitó a Nicolai, al que describió como "un calculador infatigable" que revolviera el asunto, cosa que hizo determinando ¡40 decimales!

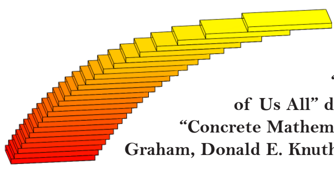
Por cierto, fue Mascheroni quien introdujo la letra griega gamma para designar a esta constante, a veces conocida como constante de Euler-Mascheroni. A la vista de las circunstancias, parece, cuando menos, sorprendente que su nombre aparezca gloriosamente unido al de Euler por un guión.

Aunque hay muchas incógnitas sin resolver sobre el número gamma, como por ejemplo si es racional o irracional, no nos extenderemos más y nos centraremos en una curiosidad relacionada con la serie armónica que te va a encantar:

Tienes un montón de cartas y una mesa y quieres apilarlas con los lados paralelos a los de la mesa de manera que sobresalgan lo más posible del borde de la misma. ¿Cuánto es lo máximo que te puedes alejar? Es fácil ver que si tenemos n cartas y tomamos como unidad de medida la mitad de la longitud de una de nuestras cartas, estas pueden sobresalir (sin pegamento ni nada, sujetas a las leyes de la gravedad):

$$1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n.$$

Para más detalles se puede consultar la segunda referencia de la bibliografía. Así, dado que la serie armónica diverge y por sorprendente que parezca, con suficientes cartas podremos hacer que sobresalgan del borde de la mesa tanto como queramos... En las fotografías se puede ver cómo funciona la cosa con 10 cartas. Por supuesto, para alejarnos mucho necesitaríamos muchísimas cartas (para alejarnos como n necesitamos como e^n cartas, pues ya sabemos que el logaritmo aproxima muy bien la suma) y tendríamos "gran parte de ellas" cerca (horizontalmente) de la mesa y "unas pocas" sobresaliendo como un trampolín, como se puede ver en la ilustración. Increíble, pero cierto.



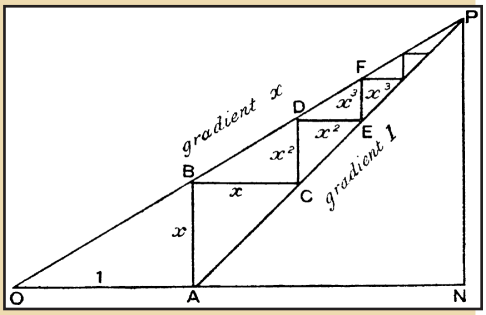
Bibliografía:
"Euler: The Master of Us All" deWilliam Dunham,
"Concrete Mathematics" de Ronald L. Graham, Donald E. Knuth y Oren Patashnik.

Visualización

En 1918, W. J. Dobbs citaba en su artículo *"The introduction to infinite series"* una bella prueba sin palabras de Carslaw de la fórmula

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = 1 / (1 - x).$$

A continuación, reproducimos la ilustración original del artículo de Dobbs.



Se comienza con un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 y x, y se continúa encajando triángulos semejantes entre dos rectas de pendientes x y 1 respectivamente, para deducir que nuestra suma infinita, s, cumple que $s - 1 = x\,s$, y por lo tanto $s = 1 / (1 - x)$.

Financiado por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología - Ministerio de Ciencia e Innovación y por el Proyecto de desarrollo y difusión del nuevo plan de estudios de Matemáticas (convocatoria del "Programa de implantación y desarrollo de las nuevas titulaciones de grado y posgrado" de la OCE, UAM).

Departamento de Matemáticas. Escrito por Carlos Vinuesa.
Agradecemos su colaboración a Lucas García, Patricia Gutiérrez, Rosa Aguirre, José Antonio Prado-Bassas y Pablo Angulo y a Wikipedia por la imagen del tablero de Go.