“La inspiración existe, pero a mí siempre me encuentra trabajando.”
Pablo Ruiz Picasso

La hoja volante

http://www.uam.es/hojavolante

Número 14. Febrero 2008

Y ahora ¿qué?

Por Fernando Chamizo

Ésta es una nueva entrega de los artículos “Y después ¿qué?”. Esta vez desde el punto de vista de un antiguo, muy antiguo, estudiante de doctorado en la UAM que ha triunfado obteniendo uno de los sueños dorados de nuestra sociedad: ser funcionario. Para mí comenzar el doctorado fue una consecución natural de los estudios de licenciatura, me gustaban las matemáticas, no me planteaba demasiado el futuro y tenía la idea ingenua de que si conseguía hacer la tesis convertirme después en profesor de universidad no llevaría mucho tiempo. Así fue, pero mi visión ha cambiado radicalmente y no sólo por las dioptrías. Ahora no suelo aconsejar a casi nadie que haga el doctorado.

Una vez que con esta frase me he ganado la oposición de la mitad de mi Departamento voy a intentar razonarlo y ganarme la del resto: Es cierto que conviene tener alumnos de posgrado y ojalá haya muchos buenos estudiantes deseosos de hacer una tesis y profesores capacitados para dirigirlos. Lo que hay que evitar es engrasar el sistema con carne humana.

En primer lugar, si no te fue bien en la carrera (o el nuevo máster) olvídate del doctorado, el nivel es muy superior. En segundo lugar, necesitas una férrea vocación, si los teoremas de los cursos anteriores te parecían aburridos, no sigas o perecerás ahogado en tu propio bostezo. En tercer lugar y más importante, ten en cuenta que actualmente el futuro de una persona con una tesis en matemáticas es incierto, y lo que es peor, las posibilidades de alguien muy bueno no aumentan proporcionalmente con sus méritos. El objetivo natural de un alumno doctorado en matemáticas en España es la universidad porque prácticamente es la única forma de dar rédito a sus estudios especializados. La saturación es patente y lleva a que la situación laboral precaria se prolongue a veces sobradamente más allá de la treintena. Cuando hables con el profesor que desinteresadamente acepta dirigirte una tesis, recuerda que con sus complementos (no me refiero al bolso monedero) cobrará unos 2.800 euros limpios al mes, más todavía si es catedrático, mientras que tú vas a estar recibiendo un exiguo subsidio durante años. Si te prometen un futuro distinto pasado mañana, no lo niego: lee el título.

En resumen, si tienes gran vocación por las matemáticas y quieres asumir el riesgo, si odias el Monopoly y te atreves con la ruleta, si aspiras a ser un ácrata al que le paga el estado, si te parece alucinante que el heptágono regular no pueda construirse con regla y compás, adelante con ello. Antes infórmate bien, no sólo leyendo los papeles que son muy bonitos (sobre todo “La hoja volante”), sino preguntando a antiguos estudiantes de doctorado, ya sean damnificados o ganadores. Yo lo volvería a hacer.

¡Violencia irracional!

En el siglo VI a.C. vivió el filósofo y matemático griego Pitágoras. Todo lo que conocemos de sus trabajos y de sus seguidores, los pitagóricos, nos ha llegado a través de otros escritores como Platón o Herodoto ya que desgraciadamente todos sus manuscritos se han perdido. Uno de los resultados más conocidos de la “Escuela Pitagórica” es el famoso “Teorema de Pitágoras” que se suele enunciar de la siguiente forma: *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*. Es decir, en un triángulo rectángulo se satisface la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde a y b representan las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa. Este simple enunciado oculta, según Morris Kline, una de las principales limitaciones y al mismo tiempo una de las principales virtudes de las matemáticas pitagóricas y griegas.

Según la doctrina pitagórica, todos los fenómenos físicos pueden ser descritos por medio de números enteros o de sus cocientes (números racionales). Para los pitagóricos, los números existían en relación a los fenómenos físicos y/o geométricos que describían. El teorema previamente descrito establece una relación exacta entre las longitudes de los tres lados de un mismo triángulo. Es por lo tanto, uno de los máximos exponentes de la matemática griega, pues expresa de forma simple una relación entre conceptos físicos. Pero, ¿por qué este teorema puede representar una limitación de las matemáticas griegas?

Bien, los pitagóricos, fieles a su doctrina, rechazaban todo número que no fuese como los arriba mencionados. Cuenta la leyenda que los pitagóricos se encontraban en un barco en medio del mar cuando Hippasus de Metapontum dio a conocer la existencia de un número “que no podía ser expresado ni como un entero ni como un cociente de enteros”. Los pitagóricos “se vieron obligados” a lanzarlo por la borda al haber producido un resultado que ponía en duda su forma de entender el mundo. El descubrimiento que produjo tal arrebato de violencia es sencillamente un caso particular del teorema arriba enunciado.

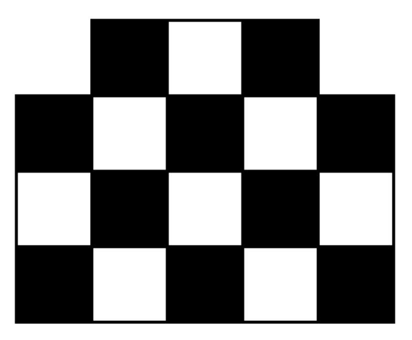
Supongamos que la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden uno es entera o racional, es decir que la podemos expresar como el cociente de dos números enteros. Con las notaciones que hemos utilizado previamente, ésto implica que: $a = b = 1$ y $c = r/s$, donde r y s son dos números enteros, que suponemos sin factores comunes (en caso de tenerlos podríamos dividir los dos números por ellos).

Por el teorema de Pitágoras, $r^2/s^2 = 2$, es decir $2s^2 = r^2$, lo que quiere decir que r^2 es un número par. Esto último implica que r tiene que ser también par (el cuadrado de un número impar es impar).

Por otro lado, como r/s es una fracción irreducible, el número s, y por tanto también s^2, <u>tiene que ser impar</u>. Luego, suponiendo que $r = 2k$ (r es par), tenemos la siguiente igualdad $2s^2 = 4k^2$, lo que quiere decir que $s^2 = 2k^2$, es decir que el número s^2 <u>es par</u>. Esto es una contradicción y también la demostración moderna de que la raíz cuadrada de 2 es irracional.

En el próximo número hablaremos sobre la relación entre Pitágoras y el billar.

La respuesta al acertijillo anterior es que el señor Gómez no puede embaldosar su jardín con las baldosas rectangulares. En principio necesitaría 9 baldosas porque había 18 cuadradas, pero es imposible colocarlas. Si pintamos las baldosas cuadradas



del jardín como si de un tablero de ajedrez se tratara, observamos que cada baldosa rectangular tapará una baldosa negra y una blanca. Pero mientras que tenemos 10 cuadrados negros, sólo tenemos 8 blancos. Así, el embaldosamiento no se puede llevar a cabo.

Eso ya lo sabían Rubén Cruz, Alberto Castaño y Dulcinea Raboso. ¡Enhorabuena a todos ellos!

El acertijillo

Cien prisioneros están colocados en una fila, mirando hacia adelante, de manera que cada uno puede ver a todos los que tiene delante. El guardián pone en la cabeza de cada uno un sombrero negro o uno blanco, y después les pregunta, empezando por el último de la fila (es decir, primero pregunta al que puede ver a todos los demás), cuál es el color de su sombrero. Los prisioneros que aciertan el color de su sombrero son liberados. Todos los prisioneros pueden escuchar lo que dicen el resto y si es correcto o no. Si los prisioneros pueden acordar una estrategia de antemano, ¿cuál es la mejor estrategia? ¿cuántos quedarán en libertad con seguridad?

Agradecemos la sugerencia del tema por parte de Manuel Silva, en la próxima hoja comentaremos, además de la solución, la relación que tiene esto con el axioma de elección.

Vamos con la solución al problema anterior (El de: A: No sé la suma. B: No sé el producto. A: Ya sé la suma. B: Ya sé el producto.).

Llamamos S a la suma y P al producto de los números.

a) Si P fuera producto de dos primos distintos, P = pq, entonces A sabría la suma (S = p + q).

b) Si P fuera un primo al cuadrado, P = p^2, entonces A también sabría la suma (S = 2p).

c) Si P fuera un primo al cubo, P = p^3, entonces A también sabría la suma (S = p^2 + p).

d) Si P fuera una potencia de un primo mayor que 3, P = p^n con n>3, entonces habría al menos dos sumas distintas, p^{n-1} + p es siempre estrictamente mayor que $p^{n-2} + p^2$ (p^{n-1} + p es mayor o igual que $2p^{n-2}$ + p y esto es estrictamente mayor que $p^{n-2} + p^2$).

e) Si P fuera el producto de dos primos distintos por un número mayor que 1, P = pqm donde p y q son primos y m > 1, entonces siempre habría al menos dos sumas distintas, p + qm y q + pm (de ser iguales p tendría que ser igual a q).

Luego si A no sabe la suma es porque P no es pq, P no es p^2 y P no es p^3.

Escribamos las primeras posiblidades, lo que descarta los casos S = 4, S = 5 y S = 6:

S = 4: 2 + 2 (P = 4)
S = 5: 2 + 3 (P = 6)
S = 6: 2 + 4 (P = 8)
3 + 3 (P = 9)
S = 7: 2 + 5 (P = 10)
3 + 4 (P = 12)
S = 8: 2 + 6 (P = 12)
3 + 5 (P = 15)
4 + 4 (P = 16)
S = 9: 2 + 7 (P = 14)
3 + 6 (P = 18)
4 + 5 (P = 20)

Si la suma fuera 7, B sabría el producto con tener la suma porque la descomposición 2 + 5 no es posible por lo que ha dicho A, y no podría decir su primera frase. En todos los casos siguientes B no sabe el producto aunque sepa la suma porque siempre hay al menos dos formas que dan esa suma y que no son (p, q), (p, p) o (p, p^2).

Ahora bien, si después de que B diga que no sabe el producto, A dice que ya sabe la suma, es que el hecho de eliminar el caso del 7 le ha servido para algo. El producto tenía que ser 10 o 12. Como 10 es un producto que de 2 primos distintos, tiene que ser 12. 12 sólo sale en las sumas 7 y 8. Como acabamos de eliminar el 7, los números tienen que ser 2 y 6.

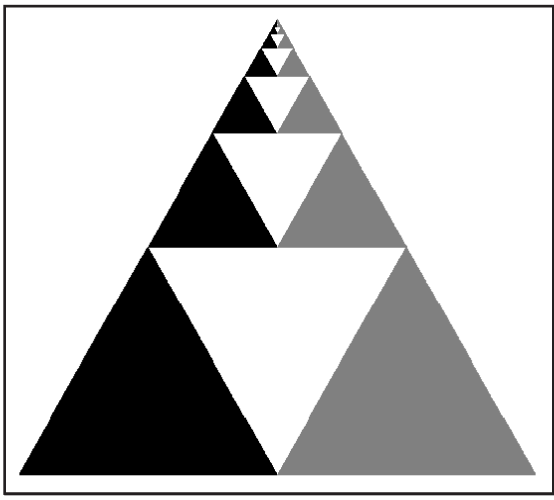
Ganan un ejemplar del libro *"Matemagia"* de Fernando Blasco: Raúl Osuna, Gabriel Mora, Dulcinea Raboso, Ángela y Esaú Fernández, Rubén Jiménez, Sonsoles Blázquez, Jorge Viejo, Jesús Álvarez y Alberto Coca.

Muchas gracias a todos por vuestras respuestas.

El problema

Dos ladrones han robado un collar circular con 100 cuentas, 50 blancas y 50 negras. ¿Pueden cortar el collar por un diámetro de manera que cada mitad tenga 25 perlas de cada color?

Respuestas al acertijillo y al problema a: hojavolante@uam.es.



Puntualizando

En el artículo del número anterior "El poder desconocido de un modelo matemático", la elección del número Z se hace de acuerdo con cualquier distribución de probabilidad nunca se anule (una gaussiana, o cualquier otra función con integral 1 estrictamente positiva valdrían).

Visualización

Este dibujo, que tanto nos recuerda al triángulo de Sierpinski, prueba que

$$(1/4) + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \dots = 1/3.$$

Referencia: Rick Mabrey, The Mathematical Association of America. Agradecemos la sugerencia por parte de Lucía Contreras.

IV Certamen «Teresa Pinillos» de ensayos de divulgación científica y humanística

La asociación para la comunicación científica y humanística Nexociencia de La Rioja organiza *Ensaya'08*, IV certamen «Teresa Pinillos» de ensayos de divulgación científica y humanística.

Tras la buena acogida que tuvieron las tres ediciones anteriores, que han dado lugar a la edición de dos libros recopilatorios titulados *Un breve viaje por la ciencia*, esta nueva entrega se lanza con la voluntad de seguir impulsando la comunicación de la ciencia y consolidar este formato breve y accesible para todo el público dentro del panorama de la divulgación científica en español.

Premios de 1.000 y 2.000 euros esperan a los autores de los ensayos ganadores. Más información en la web oficial: www.unirioja.es/ensaya.

Hexaflexágonos

- Oye, la cosa esa de papel que estabas doblando antes se parece mucho a una cosa que hacía yo de pequeño en la que elegías una solapita, se levantaba y ponía “feo”. Bueno, a veces ponía “tonto”, según cuál levantaras...

- Pero, como te he intentado explicar antes no es lo mismo.

- Venga, vuélvemelo a contar, aunque sea un rollo, a ver si esta vez me entero de algo.

- Todo comenzó en otoño de 1939. El estudiante inglés Arthur H. Stone se encontraba en Princeton...

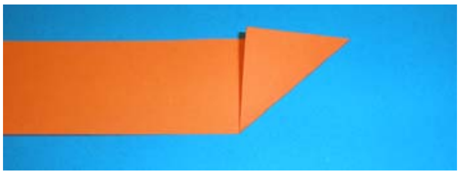
- Sí, eso ya me lo has dicho antes, pero ¿qué hacía con una tira de papel en la mano?

- Bueno, se da la curiosa circunstancia de que el tamaño de las hojas de papel de los cuadernos americanos es mayor que el de los cuadernos británicos, así que Arthur arrancó una tira de las hojas de su nuevo cuaderno americano para poder ponerlas en su carpeta.

- Y entonces fue cuando empezó a aburrirse y se le ocurrió doblar una tira en triángulos equiláteros.

- Eso es. Por cierto, no es tan fácil hacer eso. Para hacer triángulos equiláteros necesitas un ángulo de 30 grados (o de 60 si lo prefieres). ¿Sabes construir un ángulo de 30 grados sólo doblando un papel?

- Bueno... ¡Mira! Sé hacer uno de 45º.



- Muy bien, con eso ya puedes hacer un cuadrado a partir de la tira.

- ¿Y ahora cómo hago el ángulo de 30º a partir de un cuadrado?

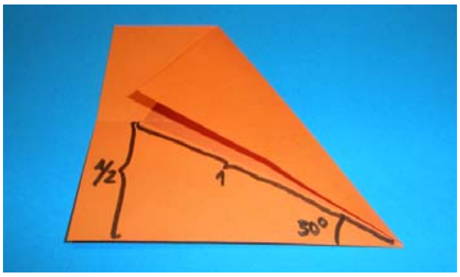
- ¿Recuerdas las razones trigonométricas? ¿Cuál es el seno de 30º?

- Sí, 1/2.

- Vale, pues entonces necesitas construir un triángulo rectángulo con un cateto igual a 1/2 y con hipotenusa igual a 1.

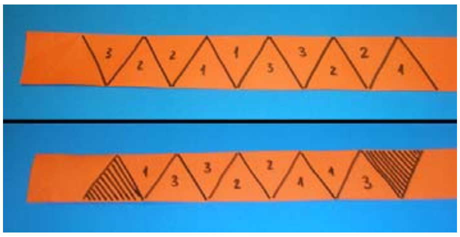
- Dado el cuadrado, puedo comenzar doblándolo por la mitad...

- ¡Muy bien! Y si ahora doblas de manera que el lado derecho vaya desde el doblez que has hecho a la esquina inferior derecha...



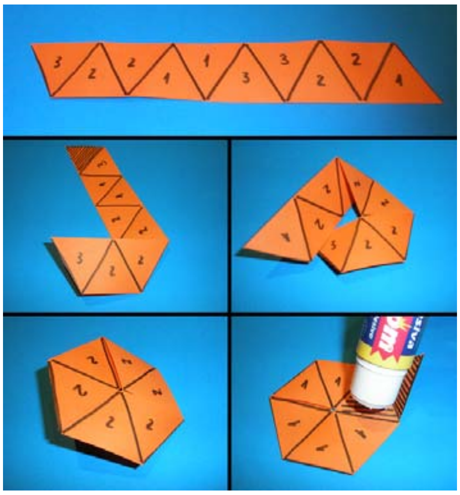
- ¡Claro! ¡Entonces ya tengo el triángulo rectángulo con ángulo de 30º que quería!

- Eso es. Ahora, una vez conseguido el ángulo de 30º es fácil seguir doblando y marcar los triángulos equiláteros en la tira.



- ¿Y por qué has puesto esos números y esas marcas?

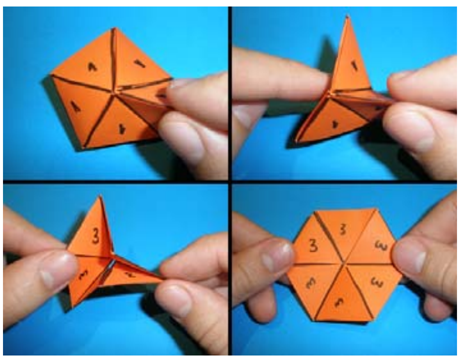
- Ahora lo sabrás. De momento quédate sólo con los 10 triángulos y dobla así (tres veces hacia atrás)...



... y finalmente dale la vuelta y pega las zonas rayadas. ¡Ya tienes un trihexaflexágono! Esta es una de las formas en que se le ocurrió doblar las tiras de papel al señor Stone.

- ¿Y qué tiene de especial? Sólo es un hexágono con unos por un lado y doses por el otro...

- Ahí te equivocas, es algo más ¿o no te acuerdas de que en la tira había treses?



- ¿Quieres decir que lo puedo doblar para que se vean los treses?

- Pues sí, es muy fácil. Mira las fotos, en cuatro pasos, como “el chiqui-chiqui”: se pinza, se empuja por el lado contrario, se abre y ya tienes la nueva cara.

- ¡Los doses desaparecen y ahora tengo una cara con unos y otra con treses!

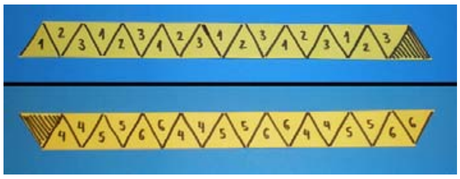
- ¡Efectivamente! Este es el primer flexágono que Stone descubrió, tiene tres caras. De ahí su nombre: tri (tres caras) - hexa (con forma de hexágono) - flexágono (que se doblan para pasar de unas a otras).

- ¡Qué cosa más curiosa, oye!

- Sí, pero este no es el final de la historia, es sólo el principio. Stone estuvo toda la noche pensando y llegó a la conclusión de que podía construir un hexaflexágono más complicado con seis caras en lugar de tres.

- ¡Y a la mañana siguiente lo construyó!

- ¡Pues sí! Para construirlo hace falta una tira con 19 triángulos, en lugar de 10 como antes.

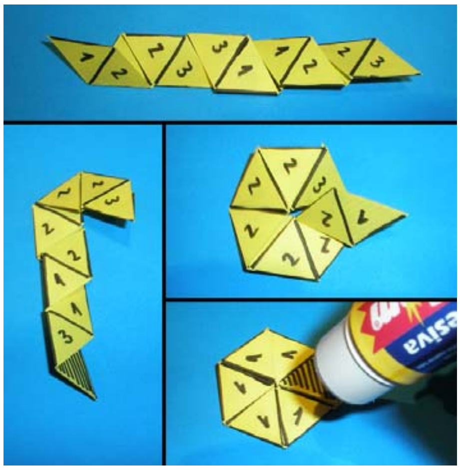


- Ah, y por una cara numeras 123, 123, 123... y dejas el último para pegar y por la otra dejas el primero para pegar y numeras 44, 55, 66, 44, 55, 66...

- Sí, y ahora se enrolla la tira de manera que se toquen cara con cara los cuatros, los cincos, los seises...

-¿Como si enrollara la tira en una tablita?

- ¡Eso es! Y ahora doblas muy parecido a como hacías para el trihexaflexágono y pegas de la misma manera, así:



- ¡Toma ya! ¡Y ya tengo un hexahexaflexágono!

- ¡Seis caras con forma de hexágono! ¡Hexahexaflexágono! Si vas pinzando como antes y vas abriendo nuevas caras al azar, encontrarás todas sin mucha dificultad.

- ¡Cómo mola!

- Pues Stone estaba tan emocionado como tú (o más) así que empezó a enseñar los flexágonos a sus amigos. Pronto comenzaron a aparecer flexágonos en las mesas a la hora de comer y a la de cenar. Y entonces se organizó el "Comité de los Flexágonos" para investigar más en profundidad los misterios de estos nuevos objetos. Además de Stone, los otros miembros del comité eran Bryant Tuckerman, Richard P. Feynman y John W. Tukey.

- Oye, que me he atascado, ahora sólo me están saliendo los cuatros, los treses y los doses ¡y otra vez los cuatros! ¿No tendrían que salir todos?

- Ahí está la gracia, depende de cómo dobles el flexágono. De hecho las caras 4, 5 y 6 son un poco más difíciles de obtener que las caras 1, 2 y 3.

- ¿Y cómo puedo doblar para estar seguro de que obtendré todas las caras?

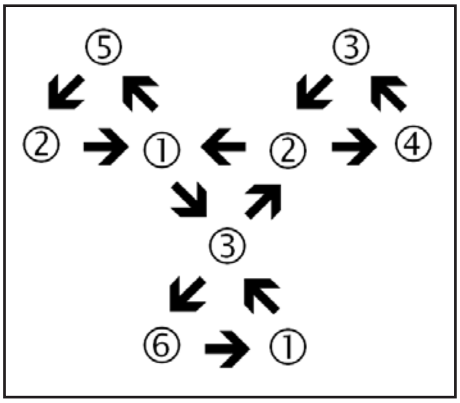
- Tuckerman se hizo la misma pregunta y encontró un procedimiento, que llamaremos la "travesía de Tuckerman" para hacer aparecer las seis caras del "hexahexa" en un ciclo de 12 dobleces. Las caras 1, 2 y 3 aparecen tres veces más que las caras 4, 5 y 6.

- ¿Y cómo es?

- Muy sencillo, mantente doblando en la misma esquina hasta que el flexágono se niegue a abrirse. Entonces salta a una esquina adyacente.

- ¿Y en qué orden van a salir las caras?

- La mejor forma para verlo es mirar al siguiente esquema, las flechas indican el orden en que se van viendo las caras. Si das la vuelta al flexágono entonces la "travesía de Tuckerman" recorre el mismo ciclo pero en el orden contrario.



- ¡Anda, es verdad! ¡Me salen los números en ese orden!

- Pues esa es sólo una de las muchísimas cosas que probó el "Comité de los Flexágonos". Alargando la longitud de la cadena de triángulos, descubrieron que se pueden hacer flexágonos de 9, 12, 15 o más caras. ¡Tuckerman consiguió construir uno de 48 caras!

- Y todo con una tira recta de papel...

- Y no sólo con una tira recta. Tuckerman también encontró que con una tira de papel cortada en zig zag podía construir un tetrahexaflexágono o un pentahexaflexágono.

- Ah, los de 4 y 5 caras.

- Eso es. De hecho también hay tres tipos de hexahexaflexágonos, los otros dos se obtienen a partir de tiras que no son rectas. Y bueno, muchísimas cosas más, pero si sigo contando cosas esto va a ser aburridísimo.

- Oye, estoy pensando que en cada una de las caras se puede hacer un dibujo, el que uno quiera

- Es cierto, pero ¡cuidado! aunque los triángulos que salen en cada cara siempre son los mismos, pueden aparecer girados de distintas maneras.

- ¿Cómo?

- Sí, mira, si dibujas figuras geométricas en las esquinas de los triángulos verás más claro lo que te digo. Aquí tienes tres configuraciones distintas en las que se pueden disponer los triángulos de una cara.

- ¿Y todo esto también lo estudió el "Comité de los Flexágonos"?

- Así es. Esta idea de dibujar cosas en las caras de los flexágonos la han utilizado muchas empresas para hacer publicidad. Incluso la revista *Scientific American* regaló en 1956 una tarjeta de navidad que era un hexahexaflexágono que mostraba distintos copos de nieve.

- Pues no ha nevado desde entonces...

- Deberías alegrarte, hemos rescatado un tema con más de medio siglo de antigüedad...

- Oye ¿y se puede poner lo de "feo" y "tonto" en un hexaflexágono?

Más información en "Hexaflexagons and other mathematical diversions. The first Scientific American book of mathematical puzzles and games" de Martin Gardner.

Monótona constante

por Fernando Chamizo

Los discursos, las relaciones personales, las funciones oscilantes, las clases, los anuncios; todo ello y más se corrompe por el corrosivo efecto de la monotonía. No nos engañemos, a pesar de lo que contamos a los visitantes hay momentos malos en el estudio de las Matemáticas en que todo parece igual, y hace tiempo que no soplo pompas de jabón. Menos mal que tenemos la siempre renovada y fresca Hoja Volante (Carlos, Matías, recordad lo del otro artículo que he mandado) y algunas otras pequeñas alegrías para sacarnos del bajón. Una de ellas la disfruté hace un año mientras releía un trabajo en las actas de un congreso y encontré el delicioso artículo de D. Zagier *"From quadratic functions to modular functions"*. Es un poco extenso y me limitaré a describir poco más de lo que denomina *primera sorpresa*. Como en los chistes, la gracia está en quien los cuenta. Merece la pena ir al original.

Para t real consideremos las funciones parabólicas "hacia abajo" $p(x) = ax^2 + bx + c$ pertenecientes a $\mathbf{Z}[x]$ (es decir, con coeficientes enteros), con $a<0$ y con discriminante $b^2 - 4ac = 5$ tales que t esté entre las dos raíces.

Por ejemplo, para $t = 0$ sólo hay dos: $p_1(x) = -x^2 + x + 1$ y $p_2(x) = -x^2 - x + 1$, mientras que para $t = 1/3$ un cálculo más extenso lleva a que hay cuatro: las dos anteriores, $p_3(x) = -5x^2 + 5x - 1$ y $p_4(x) = -11x^2 + 7x - 1$. Para números raros como e o π no está claro cómo hallar estas parábolas pero un ordenador podría ir generándolas poco a poco.

La *primera sorpresa* a la que se refiere Zagier es que la función $f(t)$, definida como la suma de $p(t)$, esto es, la suma de los valores de todas estas funciones parabólicas en el punto t, está bien definida y es (redoble de tambor) ¡constante e igual a 2! En los primeros ejemplos $p_1(0) + p_2(0) = p_1(1/3) + p_2(1/3) + p_3(1/3) + p_4(1/3) = 2$ mientras que para los números raros el ordenador en un tiempo razonable nos da 1'999... Otra sorpresa del artículo de Zagier es que la suma de $p^3(t)$ también es idénticamente 2. ¿No es curioso? La invariable función constante fue suficiente para romper la monotonía de mis relecturas. Para el que necesite más acción, la suma de $p^5(t)$ es continua pero no tiene 10 derivadas continuas.

Cofinanciado por:

i-math ingenio mathematica

Departamento de Matemáticas. Escrito por Matías Núñez y Carlos Vinuesa.
Agradecemos la colaboración de Fernando Chamizo, Lucía Contreras y Manuel Silva.

UAM