CIEGOS ANTE EL AZAR

J. M. Sanz-Serna

Universidad de Valladolid

Bilbao, 18 febrero 2014

I: EL EXTRAÑO CASO DE LAS COMPAÑÍAS RIVALES

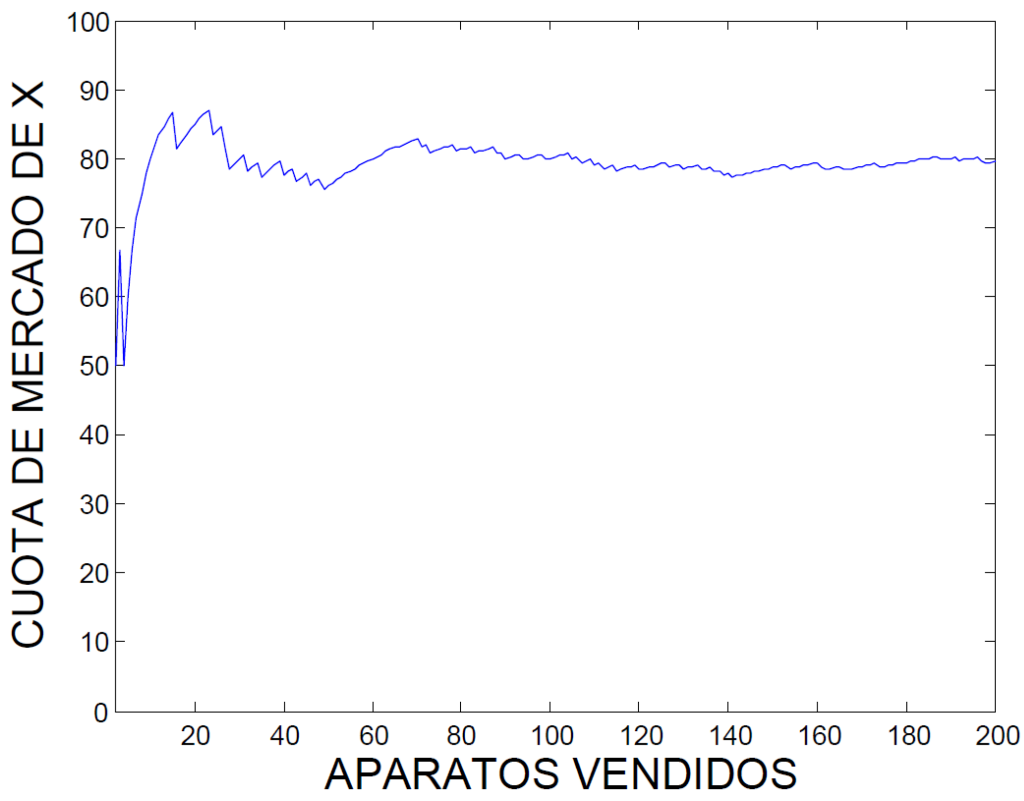
• Dos compañías rivales X, Y lanzan simultáneamente sus E-LOT de cuarta generación.

• No efectúan publicidad, confiando en que la satisfacción de los usuarios sea el mejor anuncio.

• Alicia compra un E-LOT X y Bernardo un Y. A partir de ese momento cada persona interesada habla con una sola, que encuentra al azar, de las que ya tienen E-LOT, y, de acuerdo con la información que recibe, adquiere su E-LOT X ó Y.

• Los siguientes compradores son Carlos X, Daniel Y, Elena X, Fernanda X, Germán X, ...

- Evolución de la cuota de mercado de X:



• Tras un periodo incial de fluctuaciones (hasta las 25 ó 50 primeras ventas) la cuota de X se estabiliza en el entorno del 80%.

• Concluimos: El E-LOT X es notablemente superior al Y?

• Pero quizá: El E-LOT X satisface a personas con mayor capacidad de persuasión?

- Realidad: los productos X e Y son indistinguibles.

- Todos los clientes han quedado muy satisfechos y han recomendado a quienes les han preguntado la marca que ellos tenían.

- Por tanto han comprado X aquellas personas que han preguntado a alguien que tenía X (y analogamente para Y).

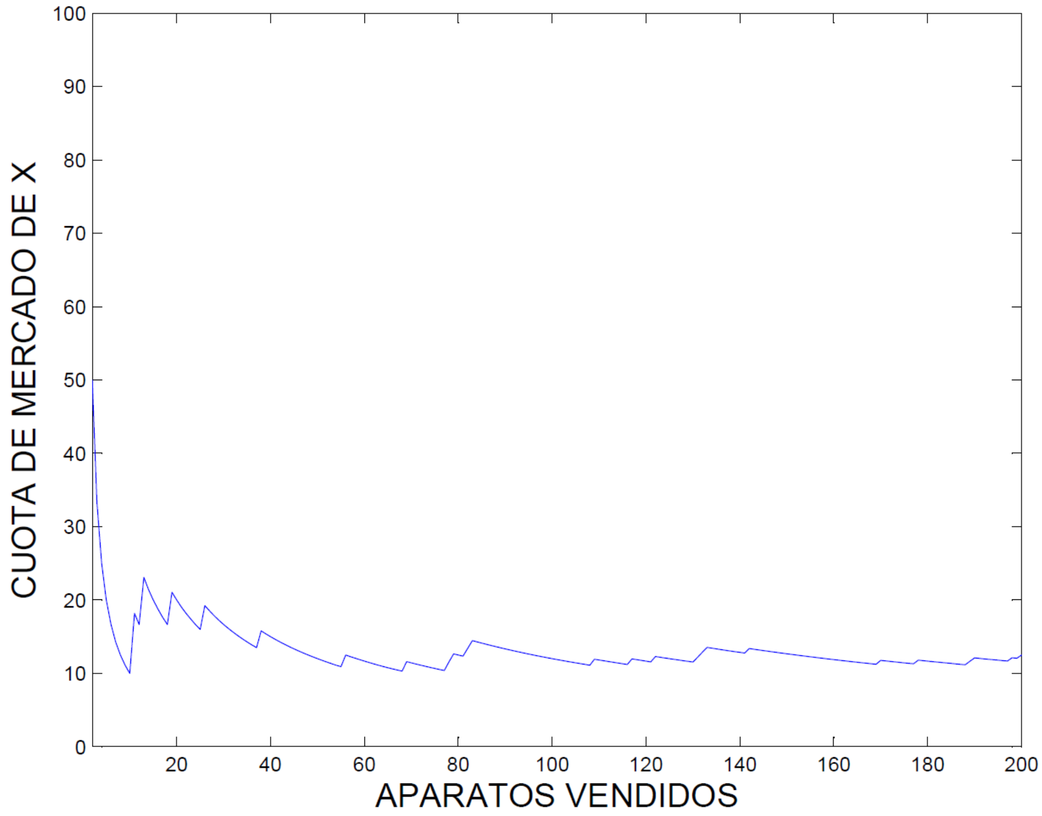
- P. ej. Carlos compró X porque preguntó a Alicia que tenía X, de haber preguntado a Bernardo hubiera adquirido Y.

- La figura que hemos visto es por completo resultado del mero azar!!!

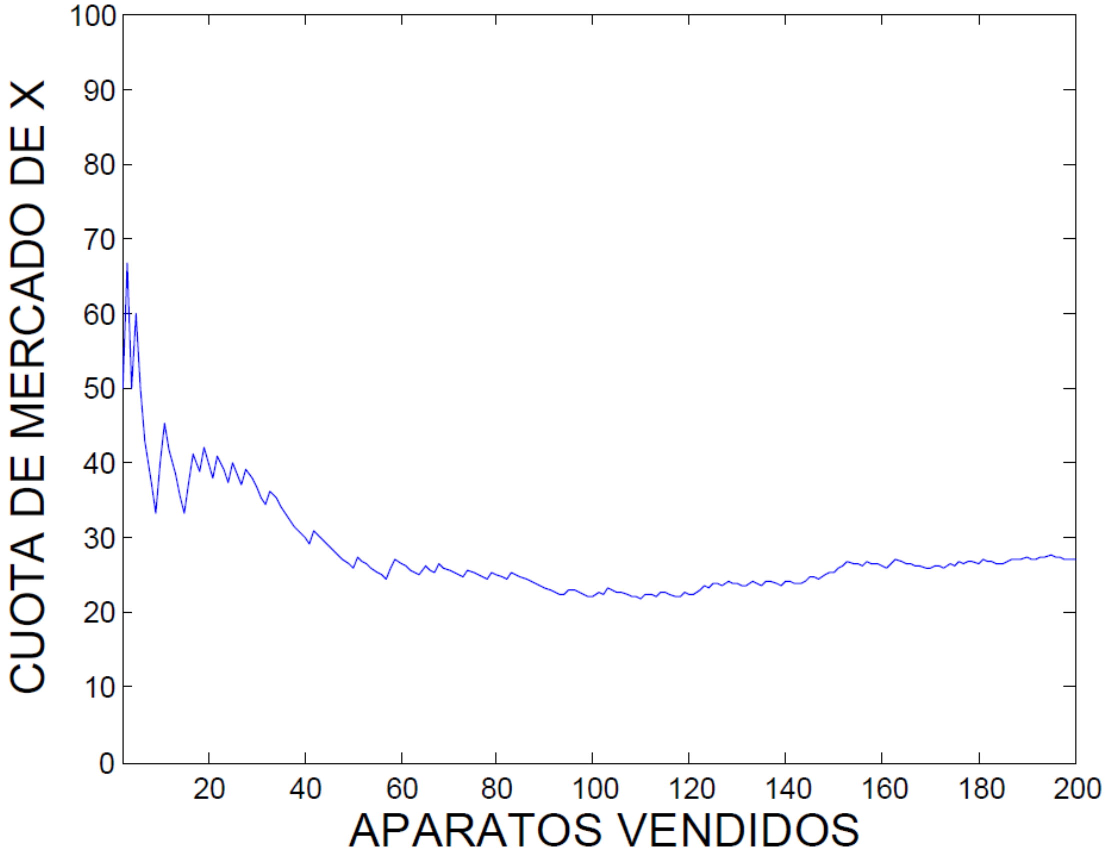
- Si los encuentros se producen de modo diverso

…

. . . las cosas son así:

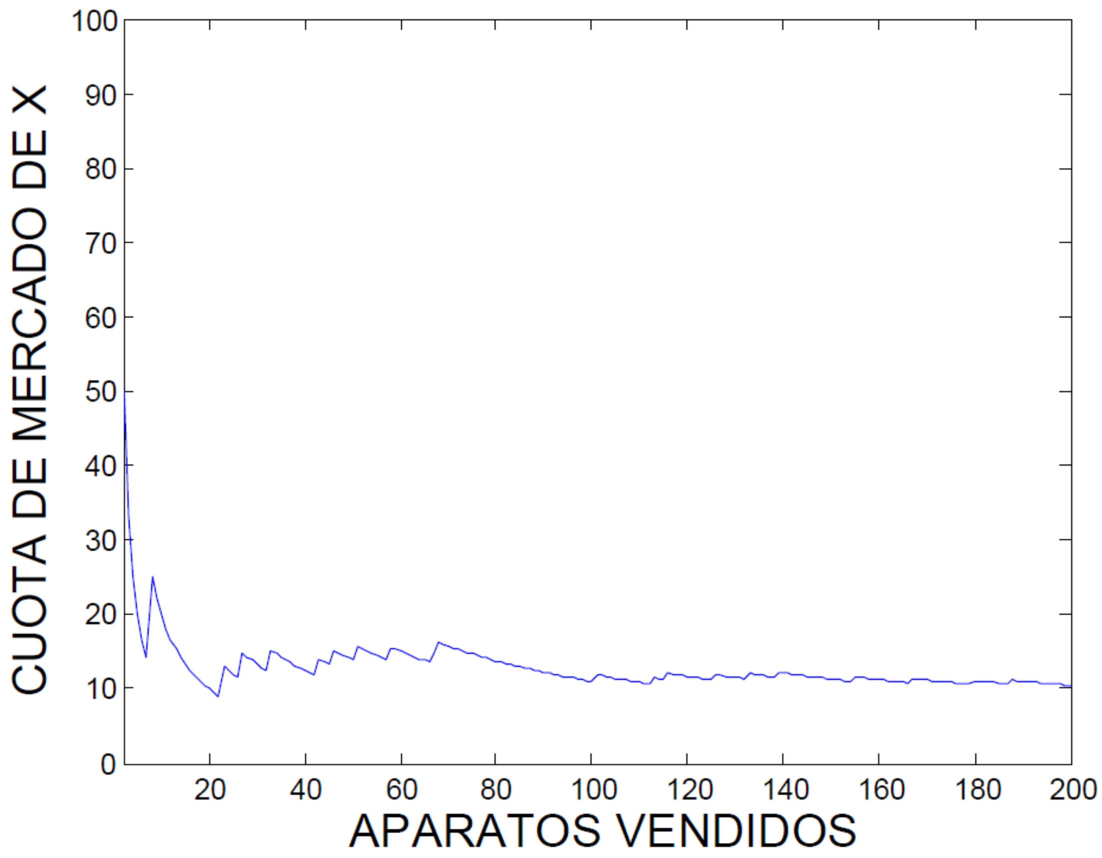


. . . o así:



CUOTA DE MERCADO DE X
APARATOS VENDIDOS
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

. . . o así:



CUOTA DE MERCADO DE X
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
APARATOS VENDIDOS

• El cálculo de probabilidades prueba que en todas las repiticiones del experimento la cuota de mercado tiene límite al irse incrementando el número de aparatos vendidos.

• Tras un periodo inicial no hay ya fluctuaciones, a pesar de que los encuentros son fortuitos.

• El valor concreto de ese límite varía de repitición a repetición y todos los (infinitos) valores entre el 0% y el 100% son ‘uniformente probables’.

• Es decir: la probabilidad de obtener un valor del límite entre 0% y 50% es la misma que la de obtener un valor entre 50% y 100% y el doble de la obtener un límite entre 0% y 25% o entre 10% y 35%, . . .

- En un fenómeno aleatorio la predicción de un caso singular es, por definición, imposible; sin embargo las *colecciones* de eventos aleatorios a menudo exhiben gran regularidad.

- Nuestra mente busca siempre explicaciones *causales* y, por el contrario, encuentra de modo invariable dificultades en reconocer o aceptar lo aleatorio.

- La preferencia por las explicaciones basadas en causas tiene ventajas evolutivas obvias.

II: REGULARIDAD PRODUCIDA POR EL AZAR

• Los ejemplos de regularidad estadística nos rodean:

• El movimiento aleatorio de los iones de cloro y sodio hace que el agua se sale uniformemente.

- Del mismo modo, el azar se encarga de que las moléculas de oxígeno en esta sala no vayan todas a un rincón.

- Cuando los individuos de una especie se distribuyen uniformemente en un habitat no es porque ‘deseen’ alejarse unos de otros, sino porque se mueven al azar.

- La ley de los grandes números (Jakob Bernoulli 1654-1705, Ars Conjectandi 1713) es el resultado matemático más antiguo y simple de los que nos permiten garantizar el comportamiento regular de una colectividad de eventos aleatorios.

• La ley en el ejemplo más sencillo: se arrojan N monedas y se obtienen C caras.

• La siguiente tabla da la probabilidad de que la fracción C/N quede en el intervalo entre 0.4 y 0.6 (error inferior o igual a $\pm$ 0.10 frente al valor 'esperado' 0.5)

N	
40	84.61%
80	94.33%
160	99.11%
320	99.97%
640	$\cdots$ %

- Y si deseamos un error menor, digamos ± 0.05

...

N	± 0.10	± 0.05
40	84.61%	57.04%
80	94.33%	68.57%
160	99.11%	82.12%
320	99.97%	93.51%
640	$\cdots$	98.99%

• En los ejemplos de moléculas, iones, etc. el número de 'monedas' que intervienen es elevadísimo . . . y por ello la desviación de la media nula a todos los efectos.

III: A VUELTAS CON LO ALEATORIO

A veces, lo aleatorio no nos lo parece:

- Un determinado día (digamos el 17 de febrero de 2014) nacen ocho bebés en un mismo hospital, cuatro son varones V y cuatro hembras M.

¿Cuál de los órdenes siguentes es más probable?

$$VVVVMMMM$$

$$VMVMVMVM$$

$$VVMVMMVM$$

Rachas: 100 símbolos 0, 1 generados aleatoriamente (prob. 50%):

0101010111000101110001011100010100001110

1101$\underline{00000000}$110001001$\underline{00000}$11100010001110

10101001101100001111

• Cuando una persona trata de escribir una sucesión aleatoria de ceros y unos el resultado es, por la ausencia de rachas, claramente distinguible de una sucesión realmente aleatoria.

• Estudios (Gilovich, Vallone, Tversky 1985) prueban que los periodos de buen o mal juego de los deportistas se explican por fluctuaciones del azar.

- Durante los bombardeos de Londres en la segunda Guerra Mundial se observaron zonas (rachas) libres de bombas. Se buscaron las causas cuando no hay otra explicación que el azar.

- W. Feller: ‘To the untrained eye randomness appears as regularity or tendency to cluster.’

Cáncer I: (Gelman & Nolan, Teaching Statistics: A Bag of Tricks) Un estudio de la incidencia del cáncer de riñón en la década 1980–1990 en EEUU muestra que, de los 3141 condados, aquellos donde la enfermedad fue más infrecuente eran rurales, de baja población, tradicionalmente republicanos y situados en el centro o sur del país.

Vida sana, alimentos no contaminados, . . . ?

Cáncer II: El mismo estudio muestra que, de los 3141 cóndados, aquellos con en la enfermedad fue más frecuente eran rurales, de baja población, tradicionalmente republicanos y situados en el centro o sur del país.

Tabaquismo, ausencia de atención médica adecuada, . . . ?

¿Cómo es lo rural?

Ley de los pequeños números:

- Muchas repeticiones de un experimento hacen que el comportamiento promedio se acerque a la verdadera media (esperanza matemática) (Ley Gr. Números).

- Por ello las grandes desviaciones aparecen cuando el número de repeticiones es bajo

- Condados con baja población: un solo caso de cáncer les hace ponerse muy por encima de la media y cero casos muy por debajo.

- De la información proporcionada ignoramos precisamente el dato más relevante: que los condados eran de baja población.

Taxis: (Tversky & Kahneman 1980) En una ciudad dos empresas de taxis, Verde y Azul, 85% de los taxis son verdes y el 15% azules.

- Un taxi atropella a una persona de noche y se da a la fuga.

- Un testigo afirma que el culpable es azul. Se comprueba que el testigo identifica correctamente el color en el 80% de casos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi fuera realmente azul?

- La respuesta típica es 80%.

- La verdadera 41% (Teorema de Bayes).

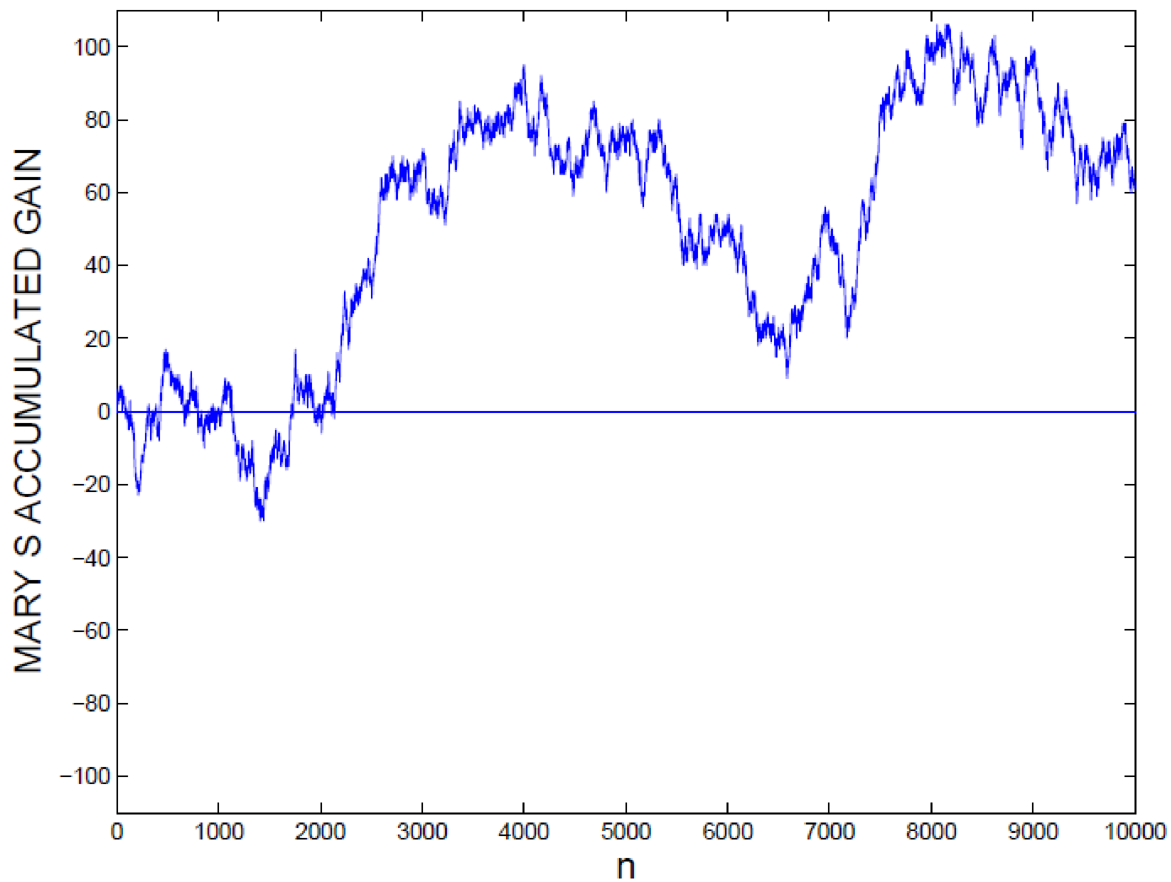
- Ignoramos el dato relevante de que la mayoría de taxis son verdes.

• Si se cambia el problema suprimiendo el dato ‘el 85% de los taxis son verdes’ y reemplazándolo por ‘los taxis verdes originan el 85% de los accidentes,’ la respuesta verdadera sigue siendo 41%, pero la respuesta típica es muy inferior a 80% y se acerca a la verdadera. (Pensamos que los verdes son culpables.)

Cara y cruz:

- Mary y Pedro juegan a cara o cruz. Si sale cara Mary entrega un euro a Pedro y si cruz Pedro a Mary.

Evolución de la ganancia (acumulada) de Mary:



- Mary ha ido ganando la mayor parte del tiempo en la partida. Es falso que porque el juego sea simétrico cada jugador vaya por delante aproximadamente la mitad del tiempo en una partida dada.

- Típicamente en cada partida uno de los jugadores va por delante la mayor parte del tiempo.

- Si se lanza la moneda una vez por segundo durante un año, el jugador menos afortunado va por delante un tiempo total acumulado menor de 54 días con probabilidad superior al 50%. Y con probabilidad superior al 10% va por delante menos de 3 días en total.

- La simetría se refleja en que aproximadamente en la mitad de las partidas sea Mary quien vaya por delante casi siempre y en la otra mitad sea Pedro.

Dos acertijos para acabar:

- La gráfica contiene una ilustración del cumplimiento de la Ley de los Grandes Números . . .

- Y una ilustración de su incumplimiento . . .