

# Teoría del Control, Modelización y Planes de Estudio

por

**Enrique Zuazua**

¿Teoría matemática del control? ¿Ingeniería del control? o, simplemente ¿Control?

Un area de investigación multidisciplinar entre las Matemáticas y la Ingeniería, con importantes conexiones con las Ciencias de la Computación, la Tecnología, las Telecomunicaciones...

## 1. INTRODUCCIÓN

Principal motivación: La necesidad de automatizar procesos para que el ser humano gane en libertad y calidad de vida.

*Orígenes:*

- Sistemas de irrigación, antigua Mesopotamia, 2000 AC.
- Harpenodaptai, antiguo Egipto, los estiradores de cuerdas.
  - \* Problema primal: La distancia más corta entre dos puntos está dada por la línea recta.
  - \* Problema dual: La máxima distancia entre los dos extremos de una cuerda se obtiene cuando ésta adopta una configuración rectilínea.
- Acueductos Romanos. Sistemas de transporte de agua provistos de válvulas y reguladores.
- El péndulo. Los trabajos de Ch. Huygens and R. Hooke, al final del siglo XVII, en los que se abordaba el problema de la medición del posicionamiento y el tiempo, tan importante en navegación.
- Reguladores de molinos de viento. Aplicado más tarde por J. Watt (1736-1819) a la máquina de vapor, el motor de la revolución industrial. El primer análisis riguroso de la estabilidad de estos mecanismos fue realizado por Lord J.C. Maxwell, en 1868 mediante las herramientas de la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En este trabajo se explicó el comportamiento aparentemente errático de estos dispositivos. De este modo se explicó que mecanismos más pulidos y elaborados pudiesen tener un comportamiento menos estable. Se trata del conocido fenómeno del *overdamping* o la sobredisipación.

- Control automático. El número de aplicaciones creció vertiginosamente a partir de la década de los treinta cubriendo diferentes áreas: amplificadores en telecomunicaciones, sistemas de distribución eléctrica, producción de papel, estabilización de aviones, industria del petróleo, del acero,....

En la actualidad.... dada la ecuación de estado  $A(y) = f(v)$ , donde  $y$  es el estado a controlar y  $v$  el control, que pertenece al conjunto de controles admisibles  $U_{ad}$ , el problema esencialmente consiste en conducir el estado  $y$  lo más cerca posible de la configuración deseada  $y_d$ :  $y \sim y_d$ .

En este marco abstracto caben muchos problemas, con formulaciones matemáticas muy diversas y en los que los modelos matemáticos implicados pueden también tener diferentes formas:

- Problemas lineales/nonlineales.
- Modelos deterministas/estocásticos.
- Modelos finito/infinito dimensionales.
- Modelos discretos/continuos.

Los problemas de control que caben en esta formulación son también muy diversos, dependiendo de como se plasme el objetivo de conducir el estado  $y$  cerca de la configuración deseada  $y_d$ . Se tienen así diversos tipos de problemas y puntos de vista:

- Control Óptimo (relacionado con la Optimización y el Cálculo de Variaciones).
- Controlabilidad: Conducir exactamente el estado  $y$  al estado prescrito  $y_d$ . Esta es una noción de carácter más dinámico.
- Estabilización o control feedback (control en tiempo real...)

## 2. ALGUNOS DE LOS INGREDIENTES PRINCIPALES DE LA TEORÍA DEL CONTROL

*El concepto de feedback.* Inspirado en la capacidad de los organismos biológicos de autoregular sus funciones. Este concepto fue incorporado a la Ingeniería del Control en los años 20, por los ingenieros del “Bell Telephone Laboratory”. Por entonces ese concepto ya estaba reconocido en otras disciplinas como la Economía.

*Proceso de Control-Feedback:* aquél en el que una “caja negra” determina el modo en que el control ha de ser elegido, en tiempo real, a partir de

determinadas mediciones del estado. Los procesos feedback son habituales en nuestra vida cotidiana (el termostato, la cisterna...) y hoy en día ubicuos en Ingeniería, Economía, Biología, Fisiología...

*La necesidad de las fluctuaciones.* El estudio del péndulo con fricción y los trabajos de Maxwell sobre la estabilidad de los reguladores de las máquinas de vapor, citados anteriormente, explican que mecanismos más pulidos y elaborados pueden tener un comportamiento menos estable. Esto confirma el hecho de que los controles óptimos son con frecuencia complejos y difíciles de predecir y de computar, ya que no obedecen a la primera intuición. La Teoría del Control proporciona medios analíticos y computacionales sistemáticos para el cálculo de estas estrategias óptimas.

*Cibernética.* El término “Cybernetique” fue propuesto por el físico francés A.-M. Ampere en el siglo XIX al referirse a la aún no existente ciencia del control de procesos. El concepto se olvidó hasta que en 1948, N. Wiener (1894–1964) lo eligió como título de su célebre libro.

Wiener definió la Cibernética como “la ciencia de la comunicación y el control en animales y máquinas”. De este modo estableció la conexión entre Teoría del Control y la Fisiología y anticipó que en un futuro las máquinas diseñadas por el hombre simularían su comportamiento.

### 3. LOS ÚLTIMOS 40 AÑOS

A partir de los años 60 del siglo pasado se realizaron importantes contribuciones:

- Kalman y su teoría del filtrado y su aproximación algebraica de los problemas de control.
- Pontryagin y su Principio del Máximo, generalización de los multiplicadores de Lagrange.
- Bellman y su principio de Programación Dinámica: Una trayectoria es óptima en un tiempo dado si lo es en todos los instantes precedentes.

En los últimos 40 años se han producido avances muy significativos, entre los que cabe citar:

- Problemas no lineales. Los corchetes de Lie de campos vectoriales son una herramienta indispensable a la hora de abordar el control de sistemas diferenciales no lineales. Ejercicio: pensemos en como aparcamos y desaparcamos un vehículo.
- Modelos estocásticos. Los seres humanos introducimos incertidumbres añadidas a las propias de cualquier sistema al intervenir y actuar sobre el mismo...

- Sistemas en dimensión infinita. Control de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) de la Mecánica de Medios continuos.

En lo que respecta a los nuevos dominios de aplicación de la teoría matemática desarrollada en este campo cabe mencionar:

- Reducción del ruido en vehículos. Ecuaciones de ondas acústicas, materiales y dispositivos inteligentes,...
- Computación y Control Cuántico. Control Laser para el diseño de configuraciones moleculares coherentes. En este ámbito interviene la ecuación de Schrödinger (una ecuación de ondas con velocidad infinita de propagación.)

P. Brumer and M. Shapiro, Laser Control of Chemical reactions, *Scientific American*, March, 1995, pp.34–39.

- Ondas sísmicas, terremotos.  
F. Cotton, P.-Y. Bard, C. Berge et D. Hatzfeld, Qu'est-ce qui fait vibrer Grenoble?, *La Recherche*, **320**, Mai, 1999, 39–43.
- Estructuras flexibles.  
*SIAM Report on "Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective"*, W. H. Fleming et al., 1988.
- Y muchas otras...  
*Control in an information rich World*, SIAM, R. Murray Ed., 2003.

#### 4. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA DOCENCIA DE ESTA DISCIPLINA Y LOS PPEE

- Consideramos que es importante que los jóvenes matemáticos en formación tengan acceso a elementos básicos de esta disciplina no sólo a través de contenidos matemáticos sino también con la posibilidad de vislumbrar su importancia real a través de ejemplos de aplicaciones relevantes.
- A pesar de la sofisticación de las teorías actuales hay algunos elementos fundamentales (como la condición de rango de Kalman para el control de un sistema lineal de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)) que pueden ser explicados de manera perfectamente accesible a los alumnos de todos los ciclos, sin que por eso se pierda en absoluto la profundidad de los conceptos y resultados subyacentes.
- Desde mi punto de vista es difícil e innecesario establecer las fronteras entre la Optimización, la Investigación Operativa, el Control y el Cálculo de Variaciones. Lo es más aún a nivel puramente docente en la licenciatura.

- Los elementos más importantes de estas teorías pueden y deben ser descritos en las diferentes materias de la carrera:
  - \* Geodésicas / Geometría.
  - \* Mínimos cuadrados / Álgebra Lineal.
  - \* Control y estabilización de un sistema lineal / EDO's.
  - \* Multiplicadores de Lagrange / Cálculo o Análisis.
  - \* Cálculo de Variaciones / Análisis o EDO's...

- Creemos que sería oportuno recoger parte de estas materias en un bloque de los futuros PPEE. Sin embargo sería impropio hacerlo sólo con algunas de las subdisciplinas mencionadas pues ésto restaría a este bloque utilidad formativa y lo alejaría de la realidad científico-tecnológica.

Así, el bloque previsto en el último estudio encargado por la ANECA y dedicado a la Investigación Operativa, debería recoger los elementos básicos antes mencionados adoptando una denominación más abierta, global y acorde a la realidad actual de la disciplina en el panorama internacional: **¿Optimización y Control?**

Hay para esto también razones históricas: los orígenes y tipo de problemas abordados son semejantes.

Resulta sumamente enriquecedor para el alumno ver como el mismo problema práctico puede formularse de manera muy distinta con herramientas del Álgebra, de la Geometría, del Análisis... y entender que esto no corresponde sólo a una cuestión de disciplinas matemáticas sino de modelización: al elegir un modelo u otro estamos ya optando por un tipo de matemáticas.

- El abordaje de estos contenidos matemáticos tiene que producirse en paralelo a una formación en el ámbito de la modelización: discreta, combinatoria, Mecánica Clásica, Mecánica del Continuo...
- Este bloque de "Modelización" ha de figurar en los PPEE con contenidos y objetivos definidos y no convertirse en un mero "cajón de sastre".
- Conviene distinguir el bloque de "Modelización" de lo que debe ser un bloque de "Prácticas o Aplicaciones", también interesante de cara a la formación del joven para su adaptación al mercado de trabajo. En este sentido, el Libro Blanco, a nuestro entender, no acierta. Sería deseable la inclusión de un bloque de *Mecánica y modelización* con un descriptor y objetivos precisos entre los que deberían estar los elementos básicos de la Mecánica Clásica y algunos elementos de la Mecánica de Medios Continuos, las genuinas y más tradicionales herramientas de la modelización. Este bloque debería ser complementado con otro de "Aplicaciones", con contenidos semejantes a los actuales del bloque de "Modelización" diseñado en el Libro Blanco, y en el que, a través de trabajos

eminentemente prácticos, se explorasen también otras herramientas de la modelización (discreta, estocástica,...).

- Estas cuestiones exceden el ámbito de los PPEE de la Licenciatura de Matemáticas y tienen mucho que ver con una de las grandes asignaturas pendientes de nuestro sistema I+D+i: conseguir una mayor interacción entre investigación de base y desarrollo tecnológico. La actual redacción del Libro Blanco no contribuye suficientemente a acortar distancias.

Buena parte de estas reflexiones fueron recogidas en los informes realizados por la Comisión de Educación de la RSME y por la Sociedad SEMA, realizados en el proceso de debate que acompañó a la realización del informe encargado por la ANECA.

A nuestro entender este proyecto necesita una seria revisión, que pueden influir de manera decisiva en una mayor adecuación de nuestra Licenciatura de Matemáticas a las necesidades actuales de adaptación a los futuros escenarios de la Sociedad europea.

Enrique Zuazua  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid  
Cantoblanco, 28040 Madrid  
Correo-electrónico: [enrique.zuazua@uam.es](mailto:enrique.zuazua@uam.es)

---