Algunas contribuciones de J. L. Lions a la Teoría del Control. Perpectivas

Jornada "La obra científica de J. L. Lions y su influencia en España"
UCM. Octubre 2003

Enrique Zuazua
Universidad Autónoma de Madrid
enrique.zuazua@uam.es

1 El contexto de mi charla

Conocí a Lions en la primavera de 1986 cuando yo iniciaba mi Tesis Doctoral en el Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université de Paris VI, fundado por él, y hoy denominado Laboratoire Jacques-Louis Lions. Él, en aquella época, era Presidente del CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), acababa de recibir el premio John von Neumann de la SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) y se estaba dedicando intensamente al estudio de la controlabilidad de sistemas, para lo cual había introducido el hoy clásico método Hilbert Uniqueness Method (HUM). Yo tuve la ocasión de redactar las notas de su curso 1986-87 en el Collège de France sobre este tema y en esta charla intentaré describir algunas de los desarrollos posteriores en los que las ideas de J. L. Lions resultaron decisivas y de las que he tenido ocasión de ser testigo. Concluiré planteando un problema abierto. No se trata más que de uno de los muchos interesantes y difíciles a los que ha conducido este trabajo pionero de Lions y los desarrollos posteriores a los que ha dado lugar. Pero, posiblemente, este sea uno de los mœás fáciles de presentar y por ello doblemente sorprendente.

El solía decir: "Los problemas no resueltos vuelven a surgir una y otra vez". Hablar pues de estos problemas abiertos es la mejor manera de rendirle homenaje y, a la vez, contribuir a lo que a él más le apasionaba: plantear y resolver problemas matemáticos de fuerte inspiración en nuestro entorno científico y tecnológico.

2 Sus contribuciones al Control

Una de las áreas de trabajo preferidas de Lions fue la de la Teoría del Control que él cultivó de una manera muy personal y con enorme eficacia. Cuando a finales de los sesenta comenzó a interesarse por este campo, su formación era la de un matemático puro que había contribuido de manera decisiva a lo que hoy forma ya parte de los fundamentos de la teoría moderna de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y después había cultivado el ámbito del Análisis Numérico.

En la Teoría del Control Lions encontró el laboratorio perfecto donde ensayar todas sus técnicas e ideas. En efecto, controlar un sistema, algo fundamental tanto en la supervivencia de la especie humana como en los ámbitos más avanzados del desarrollo tecnológico, exige no sólo saber si las soluciones existen o no, si son regulares, o ser capaces de aproximarlas numéricamente. En efecto, controlar un sistema necesita también de una profunda comprensión de sus propiedades cualitativas para poder prever la respuesta de las soluciones y su sensibilidad a las variaciones introducidas a través de los controles. Así, el Control fue siempre una de las piezas clave del paradigma que él popularizó: *Modelización - Análisis - Simulación Numérica - Control.*

Tras publicar en 1969 su célebre libro sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales No-Lineales, que constituye todavía hoy en día una referencia básica, Lions se interesó por la Teoría de la Homogeneización. Su libro en colaboración con Alain Bensoussan y George Papanicolaou es una referencia obligada en esta disciplina.

Pero ya para entonces Lions se interesaba por la Teoría del Control y en 1968 publicó un libro en francés en el que generalizaba a las EDP el principio del máximo que Pontryagin y sus colaboradores habían desarrollado en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y que constituyó uno de los hitos más importantes de la Teoría del Control. Este libro fue posteriormente traducido al inglés en 1971 e influyó también de manera muy importante en el área.

Más adelante Lions escribió un nuevo libro sobre el Control de Sistemas Singulares y dos libros más en colaboración con A. Bensoussan en la serie "Modern Applied Mathematics" de Wiley/Gauthier-Villars sobre el control de sistemas estocásticos. Más tarde publicó en China su libro *"Some methods in the mathematical analysis of systems and their control"* con algunas contribuciones de Li-Ta-Tsien. Todos ellos son obras bien conocidas en el campo.

Esta actividad se vió reforzada y continuada a partir de 1973 por sus cursos anuales en el Collège de France en el marco de su cátedra "Analyse et Contrôle des Systèmes" en los que, cada año desarrollaba, un nuevo tema. No puedo dejar de resaltar que resulta sorprendente que una persona que compaginaba su cátedra del Collège de France con cargos como la presidencia del CNES fuese capaz de desarrollar cada otoño un nuevo curso que constituía foro de encuentro de muchos profesores franceses y extranjeros, jóvenes y seniors, y que inspiró a tantos investigadores en sus trabajos posteriores.

Más adelante Lions se interesó por los problemas de controlabilidad en los que se pretende saber si un sistema de evolución puede llevarse de un dato inicial a un dato final mediante la acción de un control adecuado. En 1986 Lions publicó dos Notas en los Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris en las que introdujo su ya célebre método HUM para la controlabilidad de sistemas lineales de evolución. Lions desarrolló un poco más esta teoría en su artículo publicado en SIAM Review en la ocasión de la recepción del premio John von Neumann. Este tema fue el que eligió para sus cursos en el Collège de France en los años académicos 1986-87 y 1987-88. Los textos de estos cursos fueron publicados por Masson en sendos volúmenes de la colección RMA (Recherche en Mathématiques Appliquées) que Lions dirigía junto con Philippe Ciarlet en 1988.

Estos dos textos constituyeron una contribución central de Lions y el inicio de un fructífero período de investigación en el área durante los últimos quince años. Asimismo, sus trabajos posteriores en otros temas estuvieron fuertemente marcados por las técnicas y puntos de vista desarrollados en estos dos volumenes y su trabajo posterior en este ámbito.

Existen aún numerosos problemas abiertos en Teoría del Control. Pero el área conoce dos eras: la anterior y posterior a las contribuciones de Lions.

Lions, en su trabajo en este campo, hizo gala de su talante abierto y creativo: Todos los métodos eran buenos si servían para resolver problemas y, además, la vida diaria o el mundo de la Industria por el que tanto se interesó, estaba llena de problemas que podían ser formulados en términos matemáticos que conducían con frecuencia a interesantes problemas de control.

3 Un problema abierto

Me gustaría concluir esta conferencia formulando un problema abierto que desde hace quince años le intrigó y que, a pesar de los esfuerzos de muchos, sigue aún estándolo.

Consideramos la ecuación de ondas semilineal

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y^3 = \chi_\omega(x) u(t,x) & \text{en} \quad (0,1)\times(0,T), \\ y = 0 & \text{para} \quad t\in(0,T);\ x = 0,1 \\ y(0) = y_0, \quad y_t(0) = y_1 & \text{en} \quad (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

Se trata de un modelo no-lineal simplificado para las vibraciones de una cuerda. El *estado*, que representa la deformación de la cuerda, viene dado por $y = y(x,t)$. El *control* viene dado por la función $u = u(x,t)$ que actúa sólo en una parte de la cuerda pues χ_ω denota la función característica del subintervalo

$\omega = (\alpha, \beta)$. El problema que nos ocupa es sólo relevante cuando (α, β) es un subintervalo estricto de $(0, 1)$. En caso contrario, el control actua en todo el dominio y hace que la presencia de la no-linealidad sea totalmente irrelevante.

El sistema anterior está bien puesto: Para cualquier par de datos iniciales (y_0, y_1) en el espacio de energía $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$, y cada control u en $L^2((0,1) \times (0,T))$ existe una única solución y en $C([0,T]; H_0^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$.

Además es conocido que, para cada dato inicial (y_0, y_1) de energía finita, existe un tiempo $T(y_0, y_1) > 0$, de modo que la solución se puede llevar al equilibrio en ese instante mediante un control adecuado. Es decir, existe $u \in L^2((0,1) \times (0, T(y_0, y_1)))$ tal que la solución de (1) satisface

$$y(T) \equiv y_t(T) \equiv 0, \tag{2}$$

en ese instante.

Se trata de un resultado de *controlabilidad*. El resultado es de naturaleza global pues es válido para todos los datos iniciales pero no es uniforme pues el tiempo de control depende del dato inicial (las estimaciones de las que se dispone hasta el momento indican que T depende de manera logarítimica de la norma de los datos inciales a controlar) en contraposición con lo que ocurre en el marco de las ecuaciones lineales.

El problema abierto al que hacía referencia es: ¿La ecuación (1) es controlable en un tiempo independiente de la talla de los datos iniciales a controlar?

Esto es así en el caso de la ecuación de ondas lineal para la cual el tiempo puede calcularse fácilmente viendo cuánto tiempo una característica del sistema puede propagarse sin interceptar la región ω donde el control actúa. Se obtiene así un tiempo de control $T = 2\max(\alpha, 1-\beta)$.

Como decíamos más arriba, a pesar de intensos y múltiples esfuerzos, el problema está aún abierto. Estoy seguro de que a Lions le hubiese gustado conocer la respuesta y que ésta exigirá de ideas innovadoras con respecto a lo que hasta hoy se conoce.

A nosotros, además de la curiosidad por saber cuál es la respuesta a esta aparentemente elemental cuestión, nos queda su huella, la de un maestro.