

## Ondas continuas y discretas

ENRIQUE ZUAZUA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

28040 MADRID

e-mail: zuazua@eucmax.sim.ucm.es

### 1 Introducción

La ecuación de ondas es sin duda uno de los ejemplos más clásicos y relevantes a los que se recurre en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Pero no es un ejemplo meramente académico, ni mucho menos. En efecto, los primeros estudios sobre esta ecuación a los que nos referiremos más adelante, se realizan a finales del siglo XVIII, época en la que se estaban estableciendo los pilares fundamentales del Análisis Matemático, tal y como lo entendemos hoy. Los desarrollos posteriores que se han producido han ido frecuentemente ligados a avances importantes en Análisis de Fourier, Óptica Geométrica, Análisis Numérico, etc. de modo que, cabría decir, la ecuación de ondas ha sido uno de los protagonistas más destacados de las Matemáticas de estos dos últimos siglos.

En estas notas no pretendemos describir exhaustivamente la historia de la ecuación de ondas y/o de las Matemáticas que han intervenido o se han generado a través de ella. Tampoco haremos una descripción rigurosa del estado en el que hoy se encuentra la investigación sobre la ecuación de ondas y sus variantes. Nuestro objetivo al escribir estas notas no es más que introducir algunos conceptos clásicos relacionados con la ecuación de ondas desde un punto de vista histórico, para después presentar algunos avances más recientes que, si bien no exigen unas Matemáticas muy avanzadas, permiten entrever la riqueza de la problemática que esta ecuación encierra y las ideas necesarias para su comprensión.

Buena parte de estas notas están dedicadas al caso de una sola dimensión espacial, en la que la ecuación de ondas es un modelo simple para la descripción de las vibraciones de una cuerda. Mencionaremos muy brevemente cómo la Óptica Geométrica ha de intervenir de manera crucial al pasar de una a varias

dimensiones espaciales. En varias dimensiones, la ecuación de ondas es un modelo válido para describir las vibraciones de un tambor o la propagación de ondas acústicas. Ilustraremos a través de un artículo reciente dedicado a los terremotos en el entorno de la ciudad de Grenoble (Francia), cómo las ecuaciones de tipo ondas pueden ser de gran utilidad a la hora de simular y predecir la propagación de ondas sísmicas y sus efectos en nuestras ciudades y construcciones. Este ejemplo muestra con claridad lo que antes mencionábamos. La ecuación de ondas no es sólo un bello ejemplo de EDP sino que es un instrumento útil para entender el mundo que nos rodea.

Normalmente, en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, nos encontramos ante *problemas directos*. Por ejemplo, dada una ecuación diferencial y los datos iniciales, calcular la solución correspondiente. Se trata del *problema de Cauchy*. Esto es así cuando, conociendo las propiedades del medio que nos rodea, las leyes que gobiernan un determinado fenómeno físico y la situación en el presente, pretendemos hacer una previsión de futuro. En definitiva, se trata de aquellas situaciones en las que disponemos de un modelo matemático. Pero en muchas de las aplicaciones más relevantes (prospección petrolífera, tomografía computerizada, etc.) nos encontramos ante *problemas inversos*. Se trata, como su propio nombre indica, de realizar el proceso inverso y, más concretamente, de identificar los parámetros de una ecuación diferencial de la que desconocemos, por ejemplo, el valor de sus parámetros, que modelice un determinado fenómeno del que conocemos las soluciones o alguna información sobre las mismas. Se trata por tanto de invertir la aplicación que hace corresponder a una ecuación diferencial sus soluciones. Por lo tanto, en esta ocasión, pretendemos determinar las propiedades de un medio o material o las leyes que gobiernan un determinado fenómeno, a través de observaciones y mediciones experimentales reales. Mostraremos mediante un ejemplo cómo, mediante informaciones suficientes sobre el problema directo, puede también resolverse el problema inverso.

Por último, en el capítulo 6, abordaremos el problema de las aproximaciones numéricas. Si bien confiamos que las conclusiones fundamentales sean accesibles a un amplio grupo de lectores, esta sección contiene algunos desarrollos más técnicos que, en cualquier caso, deberían ser asimilables por aquellos que dispongan de una formación básica en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

La motivación de esta última sección es bien simple. Hoy en día cualquier estudio que tenga como objetivo una aplicación tecnológica o industrial real, ha de ir acompañado de simulaciones numéricas que permitan realizar cálculos efectivos en el ordenador. Al discretizar la ecuación de ondas o, de manera más

general, cualquier sistema continuo, nos encontramos con sistemas discretos o semi-discretos que confiamos reproduzcan la dinámica de la ecuación de ondas original. Pero frecuentemente nos encontramos ante una situación aparentemente paradójica. A pesar de haber elegido la discretización con criterios más que razonables, a menudo el esquema discreto o semi-discreto posee soluciones espurias que nada tienen que ver con la ecuación de ondas original. Se nos plantea entonces un problema que irremediablemente hemos de abordar de forma rigurosa. ¿Cómo podemos identificar las informaciones espurias que un método numérico proporciona y qué podemos hacer para eliminarlas? En otras palabras, a pesar de la creciente potencia de los ordenadores, ¿cómo podemos saber que lo que calculamos es efectivamente una buena aproximación de la realidad? ¿Cómo discernir entre la realidad virtual que sólo es producto del proceso de aproximación en el ordenador y la realidad del mundo que nos rodea? Veremos que el Análisis Matemático es una manera eficiente (si no indispensable) en este proceso de discernimiento. Este nos permite llegar a conclusiones interesantes: A pesar de la creciente potencia de cálculo de los ordenadores, el método matemático no puede ser suplantado por éstos.

Una de las primeras lecciones que cualquier texto de Análisis Numérico de EDP enseña es que no basta con que un método numérico parezca bien adaptado a la ecuación (lo que se denomina *consistencia* del método), sino que, si queremos garantizar su convergencia, hemos también de probar su estabilidad. La condición de estabilidad asegura que pequeños errores iniciales (inevitables en la práctica) no sean magnificados por el esquema numérico hasta corromper por completo la solución. Esto puede considerarse una primera prueba de algo que conviene tener siempre presente: A pesar de la enorme capacidad de cálculo de los ordenadores de hoy en día o, incluso, a pesar de la aparente consistencia de los esquemas numéricos utilizados, no podemos tener certeza de que las imágenes que el ordenador proporciona sea fiel reflejo de la realidad, salvo que realicemos previamente un Análisis Matemático riguroso.

Los resultados que presentamos en la última sección son una nueva prueba de este hecho ya conocido, si bien en este caso la carencia del método numérico utilizado es un poco más difícil de detectar y acontece en problemas como los mencionados en esa sección, de carácter inverso y de control, en los que el dato inicial del problema no es conocido a priori.

La ecuación de ondas que analizamos en esta sección es un sistema puramente conservativo en el que hemos ignorado todo efecto disipativo y de rozamiento. Sin embargo, en muchos procesos físicos, estos efectos están presentes y son también relevantes desde el punto de vista de la simulación numérica puestos que estos efectos disipativos pueden eliminar o compensar la presencia de estas

soluciones numéricas espurias.

Hay muchos otros temas relacionados con la ecuación de ondas, igualmente interesantes, de los que podría hablarse. La elección realizada en este artículo no es más que una de las muchas posibles. El lector interesado podrá consultar, entre otros, el artículo divulgativo de A. Nachbin [N].

Antes de concluir esta introducción deseo agradecer a A. Rodríguez-Bernal por haber llamado mi atención sobre el artículo [CBBH], a J. Duoandikoetxea por haberme clarificado algunos aspectos históricos del Análisis de Fourier, a M. Pinillos por la atenta lectura de estas notas y sus constructivas sugerencias. Finalmente, agradezco a R. Rodríguez del Río sus correcciones y haber realizado las figuras del artículo.

## 2 Las fórmulas de d'Alembert y D. Bernouilli

Consideremos la *ecuación de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (1)$$

El sistema (1) es un modelo simple para el análisis de las *vibraciones de una cuerda* de longitud  $L$  (que ocupa el intervalo espacial  $x \in (0, L)$ ) y fija en sus extremos  $x = 0, L$ . La incógnita  $u = u(x, t)$ , que depende del espacio  $x$  y del tiempo  $t$ , denota la altura a la que se encuentra el punto  $x$  de la cuerda (del intervalo  $(0, L)$ ), en el instante de tiempo  $t$ . Se trata de una ecuación en derivadas parciales de orden dos, complementada por dos condiciones de contorno que reflejan el que la cuerda esté fija en sus extremos.

En la última ecuación de (1) se establecen las *condiciones iniciales* que la solución ha de satisfacer en el instante  $t$ . Al tratarse de una ecuación de segundo orden en tiempo imponemos tanto la configuración inicial de  $u$ ,  $u_0$ , como la velocidad  $u_1$ .

Mediante  $u_t$  (resp.  $u_x$ ) denotamos la derivada parcial de  $u$  con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). De este modo,  $u_{tt}$  representa la derivada parcial de orden dos de  $u$  con respecto de  $t$  dos veces. Más adelante también utilizaremos la notación  $\partial_t$  (resp.  $\partial_x$ ) para denotar el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ). Asimismo  $\partial_t^2$  (resp.  $\partial_x^2$ ), denotará el operador de derivación parcial con respecto a  $t$  (resp.  $x$ ) dos veces.

Este es uno de los modelos más clásicos que se analiza sistemáticamente en todos los textos básicos de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En 1747 d'Alembert en [D1,2] propuso la siguiente expresión para la solución

general de la ecuación de ondas sin condiciones de contorno

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t). \quad (2)$$

Conviene observar que la expresión de la solución  $u$  que (2) proporciona no es más que la superposición de dos *ondas de transporte*:  $f(x+t)$  que se desplaza sin deformarse a velocidad uno en la dirección negativa del eje de las  $x$ , mientras que  $g(x-t)$  lo hace hacia la derecha. No es difícil llegar a la conclusión de que (2) proporciona la expresión de la solución general de la ecuación de ondas. En efecto, basta observar que el operador diferencial  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  involucrado en la ecuación de ondas se puede factorizar como

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x). \quad (3)$$

Vemos entonces que las dos ondas de transporte en las que se descompone la solución, corresponden a las soluciones de las ecuaciones

$$(\partial_t + \partial_x)u = 0; (\partial_t - \partial_x)u = 0 \quad (4)$$

respectivamente. En efecto, la solución de la primera ecuación es de la forma  $u = g(x-t)$  mientras que la de la segunda es  $u = f(x+t)$ .

Posteriormente, D. Bernouilli en 1753 en [Be] obtuvo soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante de la siguiente forma:

$$u = \sum_{k \geq 1} \left[ a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (5)$$

De este modo se dieron los primeros pasos en el establecimiento de uno de los métodos clásicos en la resolución de las EDP: *el método de separación de variables o de Fourier*.

Cabe plantearse por qué este método lleva el nombre de J. Fourier si D. Bernouilli ya lo utilizó. Esto es así porque sólo en el histórico trabajo de 1822 de J. Fourier sobre la ecuación del calor [F] quedó completamente establecido el programa a seguir a la hora de resolver una EDP a través de este método y que involucra varias etapas:

- Descomposición de los datos del problema en series de Fourier.
- Obtención de la evolución de cada coeficiente de Fourier en función de la EDP y de los datos.
- Reconstrucción de la solución como superposición de cada una de las componentes de Fourier (serie de Fourier).

Si bien D. Bernoulli obtuvo efectivamente una expresión del tipo (5), en su tiempo aún no estaban claras las nociones de función y de representación analítica de una función ([L]) por lo que era aún demasiado pronto para establecer de forma sistemática el método de Fourier. Sólo J. Fourier en [F] indicó con claridad cómo, dada una función, se pueden calcular sus coeficientes de Fourier. De este modo estableció las bases de una de las herramientas más potentes de las Matemáticas: El Análisis de Fourier o Análisis Armónico. El lector interesado por este apasionante pasaje histórico puede consultar el artículo de N. Luzin [L].

Una primera cuestión importante que se plantea de manera natural es la coincidencia de expresiones del tipo (2) y (5). Efectivamente, en la medida en que para datos iniciales fijados (posición y velocidad inicial de la cuerda) la solución de (1) es única, y si las dos representaciones (2) y (5) son válidas, ambas han de coincidir.

Esto es efectivamente así. Consideremos uno de los términos involucrados en (5). Por ejemplo  $\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales vemos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[f_k(x+t) + f_k(x-t)]\end{aligned}$$

donde

$$f_k(z) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right).$$

Tratando de un modo análogo los demás términos de (5) vemos que efectivamente, la función desarrollada en series de Fourier (5) puede ser escrita en la forma (2) como superposición de dos ondas de transporte.

Esta simple observación ilustra el modo en que en un desarrollo en serie de Fourier puede detectarse la velocidad a la que se propaga la función representada por dicha serie. Efectivamente, tal y como mencionábamos anteriormente, como se desprende de la fórmula de d'Alembert (2), la velocidad de propagación en el modelo (1) es uno. Esto puede observarse también en el desarrollo en serie de Fourier (5) por el simple hecho de que a una oscilación espacial  $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$  le corresponda una respuesta temporal de la forma  $a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)$ . Se observa asimismo que en la ecuación de ondas considerada hay una ausencia de *dispersión*, entendiéndolo por dispersión el fenómeno según el cual los diferentes componentes de Fourier se propagan a velocidades distintas, tal y como ocurre en el clásico modelo de Korteweg-de Vries [KdV] para el avance de las olas o en la ecuación de Schrödinger.

Evidentemente, los efectos dispersivos hacen que la forma de la solución cambie completamente en el tiempo.

Para convencerse de esto basta considerar la ecuación de KdV linealizada:

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

En este caso, si el dato inicial es de la forma

$$u(x, 0) = \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik\pi x} \quad (6)$$

la solución correspondiente es

$$u = \sum_{k \geq 1} a_k e^{ik^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x} \quad (7)$$

Observamos entonces que las diferentes componentes de Fourier de la solución son de la forma  $e^{ik^3 \pi^3 t} e^{ik\pi x} = f_k(k^2 \pi^2 t + x)$  con  $f_k(z) = e^{ik\pi z}$ . Por lo tanto, cada componente de Fourier se propaga a una velocidad distinta  $-k^2 \pi^2$ .

### 3 La óptica geométrica

La expresión (2) de la solución de la ecuación de ondas como superposición de dos ondas de transporte indica que en el modelo (1) la información se propaga a lo largo de las curvas características. Las curvas características son poligonales a trozos en el espacio-tiempo constituidas por segmentos de pendiente  $\pm 1$  que se reflejan en la frontera de la cuerda (tanto en el extremo  $x = 0, L$ ) (véase fig. 3.1)

La misma filosofía es válida en varias dimensiones espaciales. Consideramos por ejemplo las vibraciones de una membrana o tambor que ocupa un abierto  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$ . En este caso, si  $u = u(x, y, t)$  representa la deformación de la membrana, i.e. la altura a la que se encuentra el punto  $(x, y)$  de la membrana en el instante  $t$ , el sistema que describe la evolución de  $u$  viene dado por la ecuación de ondas bidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

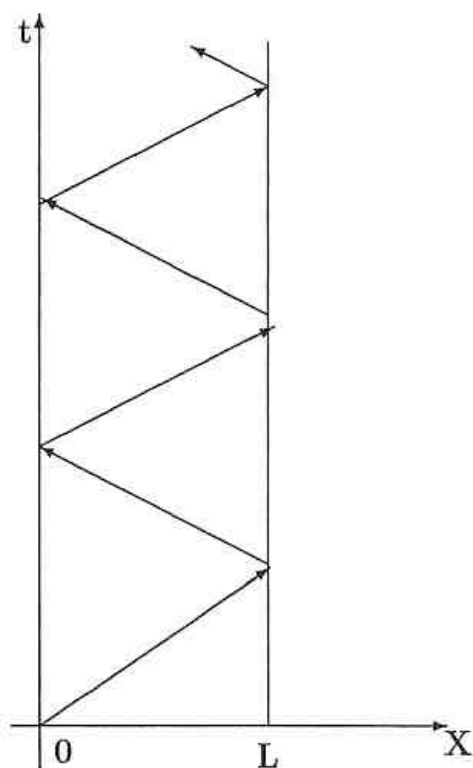


Figura 3.1.

En (8)  $\Delta$  denota el *operador Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9)$$

La primera ecuación de (8) es la ecuación de ondas bidimensional. La segunda ecuación de (8) proporciona una *condición de contorno* que en este caso representa que la membrana está fijada en su borde (como en el caso de un tambor). Las dos últimas condiciones establecen los datos iniciales que proporcionan la configuración y velocidad inicial de la membrana en el instante  $t = 0$  y que permiten determinar de manera única la solución  $u$ .

También en el caso de la ecuación de ondas bidimensional o incluso en más dimensiones espaciales la evolución subyacente en el modelo (8) puede entenderse a través de la propagación a lo largo de las curvas o rayos característicos. Sin embargo, con el objeto de definir con claridad lo que es

un rayo hemos de utilizar las nociones básicas de *Óptica Geométrica*. Un rayo es una poligonal a trozos que en el interior de la membrana  $\Omega$  se propaga en el espacio tiempo en una dirección constante y a velocidad uno. Sin embargo, al alcanzar la frontera el rayo rebota según las leyes de óptica geométrica: ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión. Véase la figura 3.2:

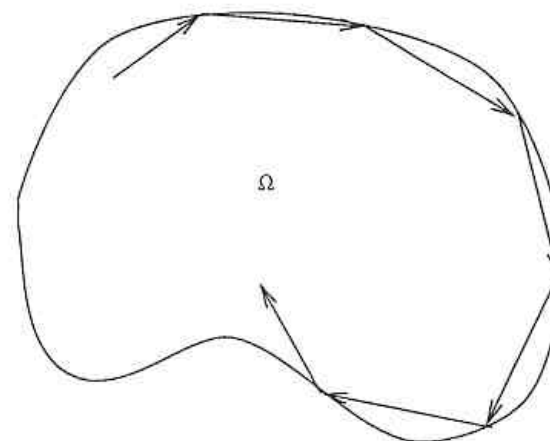


Figura 3.2.  
Proyección sobre  $\Omega$  de un rayo.

Conviene observar que esta ley de propagación y reflexión está bien definida siempre y cuando el rayo no sea tangente a la frontera de  $\Omega$  en cuyo caso pueden ocurrir dos cosas. O bien el rayo no se modifica al tocar la frontera (véase la figura 3.3) o bien el rayo entra en la frontera y adopta su forma curva hasta salir nuevamente (véase la figura 3.4).

De este modo hemos definido los rayos. Sin embargo, el análisis de las soluciones del modelo (8) a lo largo de estos rayos dista de ser tan simple como en una dimensión espacial quedó de manifiesto a través de la fórmula de d'Alembert (2). En realidad este análisis exige de desarrollos asintóticos sofisticados. El lector interesado podrá consultar en particular los trabajos [B], [K], [R], [T] y [CLOT].

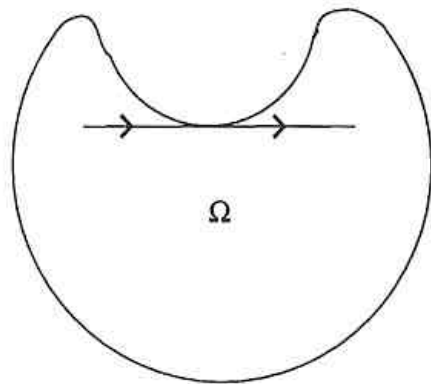


Figura 3.3.

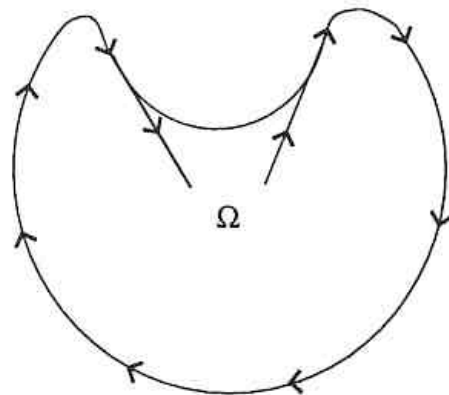


Figura 3.4.

Pero hasta ahora no hemos hablado más que de la propagación de ondas en un *medio homogéneo*, constituido por un único material distribuido con una densidad constante sobre un dominio  $\Omega$ . Como describimos seguidamente, en el ámbito de los *medios heterogéneos*, parte de lo dicho hasta ahora deja de ser válido y surgen nuevos fenómenos debidos al comportamiento de las ondas en las *interfases*, i.e. en los lugares en los que el material o su densidad cambian de tipo.

Con el objeto de ilustrar estos nuevos fenómenos consideremos el ejemplo de un tambor  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  constituido por dos materiales. El interno que ocupa

la región central  $\Omega_i$  y el externo que ocupa la corona  $\Omega_e$  tal y como ilustra la figura 3.5.

Como decíamos, el tambor está constituido por dos materiales distintos. Suponemos que en  $\Omega_i$  la velocidad de propagación de las ondas es  $a_i$ , mientras que en  $\Omega_e$  la velocidad es  $a_e$ , con  $a_i > 0$ ,  $a_e > 0$  y  $a_i \neq a_e$ . Para describir las vibraciones de este tambor conviene introducir dos funciones  $u_i = u_i(x, y, t)$  y  $u_e = u_e(x, y, t)$ , definidas en  $\Omega_i$  y  $\Omega_e$  respectivamente. Estas funciones han de resolver las ecuaciones

$$u_{i,tt} - a_i^2 \Delta u_i = 0, (x, y) \in \Omega_i, t > 0 \tag{10}$$

$$u_{e,tt} - a_e^2 \Delta u_e = 0, (x, y) \in \Omega_e, t > 0. \tag{11}$$

Además, si suponemos que el tambor está fijado en su borde exterior  $\Gamma$  habremos de imponer la condición de contorno

$$u_e = 0, (x, y) \in \Gamma, t > 0. \tag{12}$$

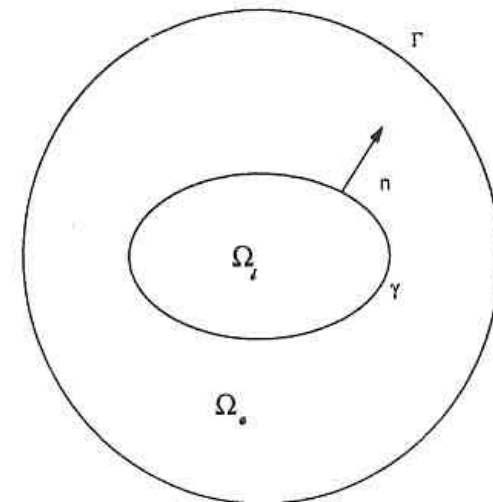


Figura 3.5.

Tambor constituido por dos materiales que ocupan respectivamente  $\Omega_i$  y  $\Omega_e$ .

Pero el sistema no estará completo hasta que hayamos introducido también las *condiciones de interfase* o *de transmisión* en la frontera común  $\gamma$ . Con

el objeto de que ambas partes del tambor permanezcan unidas a lo largo de la vibración hemos de imponer la condición de continuidad de los desplazamientos:

$$u_i = u_e, (x, y) \in \gamma, t > 0. \tag{13}$$

Pero también la tensión del tambor habrá de ser la misma a ambos lados de  $\gamma$ . Obtenemos así la condición:

$$a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = a_e \frac{\partial u_e}{\partial n}, (x, y) \in \gamma, t > 0, \tag{14}$$

siendo  $n$  el vector normal unitario a  $\gamma$  que apunta hacia  $\Omega_e$ , de modo que  $\partial \cdot / \partial n$  denota la derivada normal en esta dirección, i.e.

$$\partial f / \partial n = \nabla f \cdot n, \tag{15}$$

siendo  $\cdot$  el producto escalar Euclídeo.

La noción de rayo o de curva característica ha de ser modificada de acuerdo a las condiciones de transmisión (13)-(14). Consideremos por ejemplo un rayo que arranca de un punto de  $\Omega_i$  en una determinada dirección tal y como se indica en la Figura 3.6. Mientras el rayo permanece en  $\Omega_i$  se trata de un segmento rectilíneo que se traslada a una velocidad  $a_i$ . Al cabo de un cierto tiempo el rayo alcanza la interfase  $\gamma$ . En ese momento caben esencialmente tres posibilidades:

- (a) El rayo se refleja según las leyes de la Optica Geométrica en  $\Omega_i$
- (b) El rayo se refracta pasando a  $\Omega_e$
- (c) El rayo se divide en dos. Un rayo refractado que pasa a  $\Omega_e$  y otro reflejado en  $\Omega_i$  (véase la Figura 3.6) .

Conviene recordar que el ángulo  $\theta_e$  de refracción en función del ángulo de incidencia  $\theta_i$  viene dado por la fórmula (véase la Figura 3.7):

$$a_i |\sin \theta_e| = a_e |\sin \theta_i|. \tag{16}$$

De la fórmula (16) se desprende en particular que cuando

$$a_e > a_i, \tag{17}$$

si el rayo proveniente de  $\Omega_i$  incide sobre la interfase  $\gamma$  de manera casi tangente de modo que  $|\sin \theta_i|$  sea muy próximo a la unidad, entonces

$$a_e |\sin \theta_i| > a_i > a_i |\sin \theta_e|. \tag{18}$$

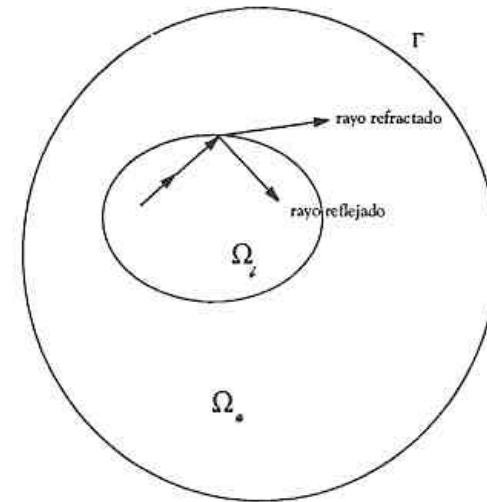


Figura 3.6.

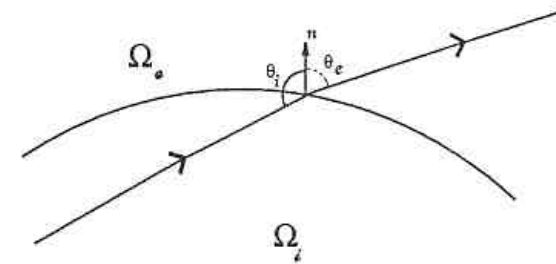


Figura 3.7.  
Rayo refractado.

Cuando (18) ocurre, la ecuación (16) evidentemente no admite ninguna solución  $\theta_e$ . Por tanto no existe dirección de refracción y el rayo es completamente reflejado en  $\Omega_i$ . Este hecho, en geometrías adecuadas ( $\Omega_i$  convexo, por ejemplo), puede dar lugar a rayos que permanecen eternamente capturados en el medio  $\Omega_i$  (véase la Figura 3.8):

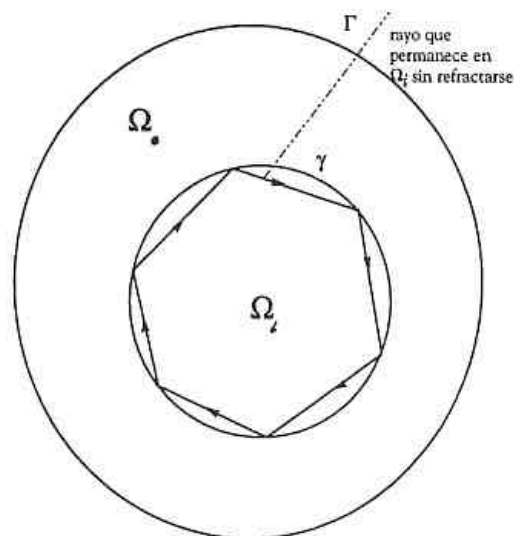


Figura 3.8.

Esto puede ser interpretado de dos maneras distintas si bien equivalentes: Como decíamos anteriormente, hay rayos y por tanto vibraciones del tambor que permanecen capturadas en  $\Omega_i$ . O, visto de otro modo, hay vibraciones que son invisibles o imperceptibles desde el medio exterior  $\Omega_e$ .

Este hecho tiene consecuencias evidentes en muchos problemas inversos o de control que se plantean en el marco de las vibraciones en medios heterogéneos. En la siguiente sección describiremos algunas consecuencias importantes en la propagación de señales sísmicas.

Conviene sin embargo hacer una matización. Las vibraciones que se localizan en  $\Omega_i$  no lo están al 100%. Es decir, estas vibraciones dan también lugar a una pequeña vibración de la membrana exterior  $\Omega_e$ . Lo que ocurre es que el ratio entre la energía de la vibración en  $\Omega_e$  y el de la vibración en  $\Omega_i$  puede hacerse más y más pequeño a medida que la vibración se concentra a lo largo del rayo capturado en  $\Omega_i$ . El infimo de este ratio es por tanto cero, lo cual no garantiza que haya vibraciones que dejan inmóvil  $\Omega_e$ . De hecho este tipo de vibraciones (aquéllas en las que la corona exterior de la membrana  $\Omega_e$  permanece inmóvil) no puede existir como se deduce fácilmente del Teorema de Unicidad de Holmgren (véase [J]).

El teorema de Unicidad de Holmgren es una consecuencia del célebre Teorema de Cauchy-Kowaleskaya. En este Teorema Sonia Kowalevskaya, en

la segunda mitad del siglo XIX, culminó con éxito el programa de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) iniciado por Cauchy mediante desarrollos en series de potencias. La idea de Cauchy, que describimos brevemente, hoy en día nos puede resultar muy natural si bien en su momento supuso una auténtica revolución. Consideremos una EDO lineal en el que tanto los coeficientes como los datos son funciones analíticas reales. Esto nos permite desarrollarlas en series de potencias. Busquemos entonces la solución del problema de valores iniciales en esta misma clase de funciones analíticas. Para encontrarla basta determinar los sucesivos coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la solución. Esto puede hacerse de forma recurrente a partir de los coeficientes de los desarrollos de los coeficientes de la ecuación y de los datos. Ahora bien, no es difícil convencerse de que la expresión de estos coeficientes se complica a medida que avanzamos en la recurrencia. Lo interesante de este método es que, gracias al criterio de la mayorante  $M$  de Weierstrass, se puede probar sin demasiada dificultad la convergencia local de la nueva serie solución. De este modo se produjo un avance notable en la teoría de las EDO: El problema de valores iniciales para una ecuación lineal con coeficientes analíticos admite una única solución local analítica. El método propuesto por Cauchy proporciona asimismo un verdadero método de cálculo efectivo de la solución.

Era sumamente natural pensar en extender este método al marco de la resolución del problema de Cauchy para EDP. Pero en esta extensión surgía una nueva dificultad que describimos a continuación. En el marco de las EDP, los datos de Cauchy están dados en una hipersuperficie que también habrá de ser analítica. Pero la aniliticidad de la hipersuperficie puede no bastar puesto que hay casos en los que el método de Cauchy parece no funcionar pues la regla de recurrencia antes descrita no permite obtener de manera biunívoca los coeficientes de la solución. El lector podrá convencerse fácilmente de esto analizando el problema de Cauchy para la ecuación del calor en la hipersuperficie  $t = 0$ :

$$u_t - \Delta u = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

La ecuación del calor es de orden dos y por tanto damos datos de Cauchy tanto para  $u$  como para su derivada parcial  $u_t$  con respecto al tiempo. Pero el sistema resulta entonces estar sobredeterminado puesto que la condición de compatibilidad siguiente que se deriva de la ecuación es una condición necesaria para la existencia de solución:

$$\Delta u_0 = u_1.$$

Precisamente el problema de valores iniciales para la ecuación del calor es uno de los ejemplos más clásicos de EDP que todos los libros recogen en el que la



solución puede ser obtenida explícitamente por convolución con el núcleo de Gauss, pero para ello sólo se impone un dato inicial  $u(x, 0)$ .

En efecto, la solución es entonces  $u = G * u_0$ , siendo  $G$  el núcleo de Gauss

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

y denotando mediante  $*$  la convolución en las variables espaciales, y es la única solución "razonable" de

$$u_t - \Delta u = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

siendo  $n$  el número de variables espaciales involucradas.

Kowalevskaya explicó de manera definitiva esta diferencia que se presenta al abordar las EDO y las EDP mediante el método de Cauchy. Para que el teorema de Cauchy sea válido en el marco de las EDP es necesario que la hipersuperficie sobre la que se imponen los datos de Cauchy sea *no característica*. Las hipersuperficies características son entonces las *malas*, aquéllas en las que el método de Cauchy no funciona, como lo es la hipersuperficie  $t = 0$ , para la ecuación del calor.

El teorema de Holmgren garantiza que cuando los coeficientes de la ecuación son analíticos y los datos son cero en una hipersuperficie no característica analítica, la única solución es la nula. Esto puede parecer una consecuencia trivial del teorema de Cauchy-Kowalevskaya, pero no lo es puesto que la unicidad se garantiza para cualquier tipo de solución (incluso las soluciones distribucionales) y no sólo para las analíticas.

Pero puede parecer sorprendente que pretendamos aplicar este Teorema en el caso que nos ocupaba de una ecuación de ondas con coeficientes constantes a trozos que presentan un salto a lo largo de una interfase. Esto se puede hacer en dos tiempos. Primero se aplica en el dominio exterior  $\Omega_e$ , de modo que si suponemos que la vibración deja inmóvil una parte abierta no vacía de  $\Omega_e$  durante un tiempo suficientemente grande, por el teorema de Holmgren, acaba dejando inmóvil todo  $\Omega_e$ . En la interfase se detecta entonces la ausencia de desplazamiento y de tensión. Esto permite ahora aplicar nuevamente el Teorema de Holmgren en  $\Omega_i$  (puesto que la hipersuperficie interfase vertical en el espacio-tiempo no es característica) y deducir que todo  $\Omega_i$  permanece también inmóvil.

De este modo vemos, como mencionábamos anteriormente, que no puede haber vibraciones concentradas al 100% en el dominio interior  $\Omega_i$ .

## 4 Propagación de señales sísmicas

Un reciente artículo aparecido en Mundo Científico [CBBH] de cuatro geólogos franceses ilustra muy claramente la importancia de las ondas localizadas que acabamos de describir.

El problema que preocupa a este grupo de geólogos es la gran intensidad con la que se perciben en la ciudad de Grenoble (Francia) seísmos de escasa amplitud que en zonas no muy lejanas apenas son observados. Tal y como los autores del artículo explican se trata de un *fenómeno local*. En efecto,

"la ciudad está construida en el centro de un valle excavado por los glaciares y repleto de sedimentos mucho más flexibles que la roca subyacente"

tal y como ellos indican.

Lo que ocurre entonces es que, reproduciendo literalmente parte del texto de [CBBH],

"Las ondas se propagan más deprisa en un medio rígido que en un medio blando, y el contraste de velocidad en el límite entre los dos, sólo deja pasar bien la energía sísmica de lo rígido a lo blando. La consecuencia es que una vez en la cuenca las ondas casi no pueden escapar. Se reflejan entonces en la superficie y en las paredes rocosas. Estas reflexiones sucesivas conducen a fenómenos de resonancia a determinadas frecuencias que se traducen en la superficie en fuertes amplificaciones de los movimientos del suelo y en un aumento de su duración. Se comprende fácilmente que las consecuencias pueden ser dramáticas cuando estas frecuencias amplificadas corresponden a frecuencias de resonancia de los edificios".

Estos pasajes de este artículo divulgativo ilustran con claridad cómo los fenómenos de localización de ondas descritos en el apartado anterior pueden observarse en la naturaleza en el contexto de las ondas sísmicas y hasta qué punto pueden ser importantes en nuestra vida cotidiana.

En la Figura 4.1 ilustramos el fenómeno que se describe en este artículo y que es coherente con el análisis de la sección anterior. El medio blando  $\Omega_i$  está rodeado por el medio más rígido  $\Omega_e$ . Una onda proveniente de  $\Omega_e$  entra en  $\Omega_i$  pero queda capturada en su interior indefinidamente puesto que la energía no se transmite desde  $\Omega_i$  a  $\Omega_e$ . A medida que aumenta el ratio entre la velocidad de propagación en el medio rígido y el medio blando este fenómeno se acentúa. En efecto, con la notación de la sección anterior, cuanto más grande es el cociente

$a_e/a_i$ , mayor es el abanico de ángulos de incidencia  $\theta_i$  que dan lugar a ondas que permanecen atrapadas en  $\Omega_i$  sin refractarse en absoluto. Esto hace posible que se tenga la situación de la figura 4.1 en la que la onda, una vez en  $\Omega_i$  puede incidir en la interfase con un ángulo de  $45^\circ$  sin que haya transmisión de energía a  $\Omega_e$ . Basta para ello con que  $a_e/a_i > \sqrt{2}$ .

El artículo antes citado concluye subrayando la importancia de los estudios teóricos y numéricos que se están desarrollando en este terreno. Efectivamente, tal y como ellos explican, el reto en la actualidad consiste en predecir si las normas impuestas a las empresas de construcción de edificios tradicionales son suficientes o no para garantizar la robustez de los edificios en caso de sismos de una magnitud 5,5 que no se pueden excluir.

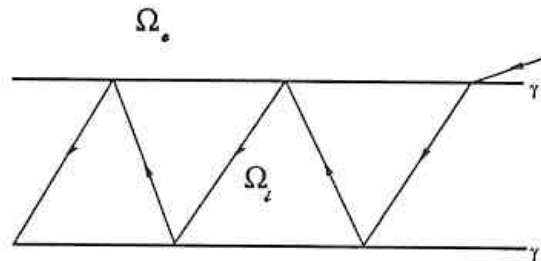


Figura 4.1.

Rayo que, proveniente de  $\Omega_e$ , queda indefinidamente capturado en  $\Omega_i$ .

La predicción del comportamiento de las construcciones humanas durante los sismos y su control constituyen uno de los grandes retos de la ingeniería en nuestros días en los que las Matemáticas y la simulación numérica necesariamente desempeñan y habrán de seguir desempeñando un papel central (véase por ejemplo [BR] y [Si]). Tal y como ha quedado de manifiesto, el "ingenuo protagonista" es, una vez más, la ecuación de ondas.

## 5 Problemas inversos

Tal y como hemos mencionado en la introducción, con frecuencia, los problemas que se plantean en el ámbito de las aplicaciones tecnológicas, si bien involucran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o Parciales (EDO/EDP) no pueden formularse en el marco clásico de los problemas de Cauchy o de contorno en los que se suponen conocidos los parámetros de la ecuación y los diversos datos y se trata de calcular (analítica o numéricamente) la solución (o probar su existencia y unicidad), sino que se trata de problemas inversos en los

que hemos de identificar los parámetros de la ecuación a través de informaciones parciales o globales sobre las soluciones que somos capaces de medir y observar de forma experimental.

La teoría matemática sobre problemas inversos está hoy en día muy desarrollada y ha adquirido un alto grado de sofisticación. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, la monografía de V. Isakov [I] y su bibliografía.

Son muchos los problemas de la vida real en los que nos encontramos con problemas inversos. Cabe mencionar por ejemplo la prospección petrolífera, la exploración del subsuelo y diversas aplicaciones médicas como por ejemplo la tomografía computerizada, entre otros. Hay otros problemas de carácter más académico pero de gran belleza. Entre ellos cabe destacar el problema clásico conocido como "Can one hear the shape of a drum?", o, ¿Puede escucharse la forma de un tambor?. Obviamente, estamos aquí haciendo referencia a "tambores matemáticos" en los que la forma puede ser la de un abierto arbitrario del plano.

Desde un punto de vista matemático, para formular de manera precisa el problema, hemos de introducir el espectro del Laplaciano con condiciones de contorno de Dirichlet en un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Conviene recordar que el Laplaciano es el operador de Laplace introducido en (7). Se trata de los números  $\lambda$ , denominados *autovalores*, para los cuales la ecuación elíptica

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda e, & (x, y) \in \Omega \\ e = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

admite una solución no trivial  $e = e(x, y) \neq 0$ .

La analogía de este problema de autovalores con el asociado a una matriz es clara. Cabe sin embargo resaltar que, en el marco del Laplaciano, hemos de imponer también la condición de Dirichlet que garantiza que  $e = 0$  en la frontera del dominio  $\Omega$ , lo cual refleja que el tambor está fijo en su borde. Obviamente, pueden considerarse otras condiciones de contorno, en función del problema físico considerado.

Conviene observar que este problema espectral surge de manera natural cuando se desarrollan en series de Fourier las soluciones de la ecuación de ondas o del calor. Por tanto, su relevancia va mucho allá del problema inverso que aquí nos ocupa.

La teoría de descomposición de operadores autoadjuntos compactos permite probar la existencia de una sucesión de autovalores reales positivos de multiplicidad finita  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$  que tienden a infinito y de forma que la sucesión de autofunciones correspondientes constituyan una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$  (el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable definidas en  $\Omega$ ). Más brevemente, a cada dominio  $\Omega$  (a cada forma del tambor) le asignamos de

este modo una sucesión no decreciente de números positivos  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$  que tiende a infinito.

El problema inverso al que hacíamos referencia consiste en determinar la forma del tambor  $\Omega$  a través del espectro.

Recientemente se dió una respuesta negativa al problema exhibiendo dos dominios poligonales (y no convexos) distintos que daban lugar al mismo espectro. Pero, a nuestro entender, el problema permanece aún abierto si nos limitamos a clases de dominios regulares y/o convexos. El lector interesado puede consultar el artículo recapitulativo de A. Sánchez-Calle a este respecto [SC].

Antes de continuar describiendo otras situaciones en las que estos problemas inversos intervienen conviene reflexionar un momento sobre las herramientas matemáticas a nuestra disposición a la hora de abordarlos. No tardaremos mucho en caer en la cuenta de que la herramienta por excelencia a la hora de estudiar este tipo de problemas es el Teorema de la Función Inversa (TFI). En efecto, los problemas inversos que normalmente se plantean suelen ser de carácter genuinamente no lineal. Esto quiere decir que la aplicación involucrada en el problema y que hemos de invertir es habitualmente no-lineal. En el ejemplo anterior la aplicación a invertir es aquella que a un dominio  $\Omega$  asocia su espectro  $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ . Se trata efectivamente de una aplicación genuinamente no-lineal.

Como decíamos, el TFI es la herramienta adecuada para abordar los problemas inversos puesto que garantiza la invertibilidad local de una aplicación siempre y cuando ésta sea regular (basta con que sea diferenciable) y su diferencial sea invertible. Venimos por tanto que la resolución del problema inverso pasa por un estudio detallado del problema directo puesto que hemos de comprobar si la aplicación a invertir, la que proporciona el problema directo, es regular y su linealizada invertible.

Es por ello que el análisis de un problema inverso viene habitualmente precedido por el estudio detallado del problema directo correspondiente.

Conviene recordar que el TFI proporciona resultados de carácter puramente local y que la obtención de resultados globales necesita normalmente de desarrollos adicionales puesto que rara vez se pueden aplicar directamente las versiones globales del TFI (que garantizan que la aplicación no-lineal es globalmente invertible si la diferencial en todo punto lo es y con normas uniformemente acotadas, i. e. con una cota independiente del punto donde calculemos la diferencial). Para ilustrar este hecho consideremos un par de ejemplos. Consideramos la función real de una variable real  $f(x) = e^x$ . Su derivada es  $f'(x) = e^x$  que es distinta de cero en todo punto. En cada punto  $x_0$  la diferencial  $f'(x_0) = e^{x_0}$  actúa como una aplicación lineal:  $L_{x_0}y = \langle f'(x_0), y \rangle =$

$e^{x_0}y$  que es invertible, siendo su inversa,  $L_{x_0}^{-1}y = e^{-x_0}y$ . Por tanto se deduce del TFI que la función  $e^x$  es localmente invertible ( $e^x$  establece una biyección de un entorno de cada punto  $x_0$  en un entorno de su imagen  $e^{x_0}$ ). Pero, obviamente, no es globalmente invertible pues  $e^x$  es un número real positivo para cada real  $x$ , y por tanto los números negativos quedan fuera de la imagen de  $e^x$ . Esto es debido a que la inversa de la diferencial,  $e^{-x_0}$ , no está inferiormente acotada cuando  $x_0$  tiende a  $-\infty$ . Sin embargo la función  $g(x) = 2x + \sin(x)$  es globalmente invertible puesto que su diferencial  $g'(x) = 2 + \cos(x)$  es invertible en cada punto con inversa  $[2 + \cos(x)]^{-1}$  uniformemente acotada entre  $1/3$  y  $1$ .

Para concluir esta sección presentamos un problema inverso relacionado con la ecuación de ondas que nos ocupa y que podemos resolver completamente.

Consideramos una cuerda de longitud  $L$  desconocida que vibra según el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (20)$$

al estar fija en sus extremos  $x = 0$  y  $L$ .

Suponemos que, a través de un sensor, podemos medir la tensión que las vibraciones de la cuerda producen en el extremo  $x = 0$ . Obviamente, al desconocer la longitud total de la cuerda  $L$  desconocemos la ubicación del otro extremo  $x = L$ . Lo que si sabemos es que la cuerda está fija también en el otro extremo.

¿Podemos identificar la longitud  $L$  a través de las mediciones que el sensor proporciona de la tensión en el extremo conocido  $x = 0$ ?

La respuesta es, como vamos a ver, afirmativa.

Como indicamos anteriormente las soluciones de (20) pueden desarrollarse en series de Fourier del siguiente modo:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)] \sin(k\pi x/L). \quad (21)$$

La tensión en el extremo  $x = 0$  viene dada por

$$u_x(0, t) = \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{L} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)]. \quad (22)$$

Se observa que la tensión es siempre una función periódica de período  $2L$ . Por tanto, la periodicidad de la tensión ( $2L$ ) está relacionada de manera unívoca (y en este caso lineal) con la longitud  $L$  de la cuerda. Esto responde afirmativamente al problema inverso planteado.

Pero cabe plantearse aún una cuestión más. ¿Cuántas mediciones hemos de hacer en  $x = 0$  para determinar completamente la longitud? Dejamos esta cuestión para el lector interesado.

Como hemos mencionado en la introducción, son muchos los contextos en los que se plantean problemas inversos. Entre ellos cabe destacar la prospección petrolífera, las numerosas aplicaciones médicas (tomografía computerizada, etc.), radares, etc. En realidad, como hemos visto, cada vez que el TFI se aplica estamos, esencialmente, resolviendo un problema inverso. Si reflexionamos un poco a este respecto nos daremos cuenta de cómo de habitual es enfrentarse a problemas inversos en la vida diaria que, sin embargo, resolvemos a menudo, afortunadamente, sin apelar al TFI.

## 6 Simulación numérica y ondas espúreas

Tal y como mencionábamos más arriba y como se pone de manifiesto en el artículo sobre ondas sísmicas al que hemos hecho referencia en la sección 4, en muchos problemas de la vida real es necesario un análisis riguroso de fenómenos de ondas que han de ir acompañados de simulaciones numéricas.

La gran potencia de cálculo de los ordenadores de hoy nos permite realizar en nuestro ordenador personal y/o portátil cálculos muy sofisticados que hasta hace unos años exigían trabajar con los más grandes ordenadores. Esta potencia de cálculo no va a hacer más que aumentar en los próximos años. Cabe entonces plantearse la siguiente cuestión ¿Es necesario continuar con un análisis matemático riguroso de las ondas o podemos simplemente confiar en nuestra creciente capacidad de cálculo y de simulación numérica?

No es fácil responder a esta pregunta. Si uno reflexiona con rigor sobre la misma enseguida se dará cuenta que, para responder con total certeza a esta cuestión es necesario realizar un análisis matemático riguroso de la adecuación de los esquemas numéricos planteados al problema en cuestión. Pero entonces, implícitamente, estamos respondiendo negativamente a la pregunta planteada.

Nos encontramos pues ante la paradoja de necesitar responder negativamente a la cuestión para poder reflexionar seriamente sobre la misma.

A pesar de esta aparente paradoja son muchos los que creen que las Matemáticas, en el sentido que las hemos entendido en este siglo, tienen sus días contados, al menos en el contexto de los problemas abordados en estas notas, y que todos y cada uno de los problemas pueden ser resueltos a base de calcular más y más con nuestro ordenador que mejorará sus prestaciones cada día.

En esta sección vamos a retomar el problema del final de la sección anterior para concluir que: Efectivamente, mediante métodos numéricos adecuados, se puede simular la realidad del modelo continuo de manera satisfactoria. Pero, el desarrollo de métodos numéricos adecuados exige un análisis matemático previo

muy fino.

Al final del camino nos encontraremos pues con una respuesta sumamente salomónica y tendremos que rendirnos ante la evidencia de que sólo combinando un estudio teórico riguroso y los métodos numéricos se puede avanzar con paso firme, aún a riesgo de hacerlo un poco más lentamente.

Retomemos por tanto las ecuaciones de la vibración de una cuerda de longitud  $L$  fija en sus extremos  $x = 0, L$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (23)$$

Como ya habíamos indicado, las soluciones de (23) pueden desarrollarse en series de Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} [a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)] \sin(k\pi x/L) \quad (24)$$

con coeficientes  $\{a_k, b_k\}_{k \geq 1}$  que vienen determinados unívocamente por los datos iniciales  $\{u_0(x), u_1(x)\}$  de modo que

$$u_0(x) = \sum_{k \geq 1} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right); \quad u_1(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{k \geq 1} k a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \quad (25)$$

Conviene también observar que (23) es un modelo puramente *conservativo* en el que no se tiene en cuenta ningún fenómeno de rozamiento y/o disipación. Este hecho queda perfectamente de manifiesto en la *ley de conservación de la energía*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2] dx = Cte. \quad (26)$$

En efecto, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (27)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L [u_x u_{xt} + u_t u_{tt}] dx \\ &= \int_0^L \{[-u_{xx} + u_{tt}] u_t\} dx + u_x(x, t) u_t(x, t) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

gracias a la ecuación y a las condiciones de contorno.

A la hora de aproximar numéricamente las soluciones de (23) la primera idea que surge de manera natural es la de introducir una semi-discretización

en espacio para aproximar (23) mediante un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para ello, dado un número natural  $N$  descomponemos el intervalo  $[0, L]$  que ocupa la cuerda en reposo en  $N$  subintervalos iguales. Con este objetivo, introducimos la partición del intervalo  $[0, L]$ :

$$x_0 = 0, x_j = jh, j = 1, \dots, N + 1 \tag{29}$$

donde

$$h = L/(N + 1). \tag{30}$$

Aproximamos la función  $u(x, t)$  mediante  $N + 2$  funciones que dependen exclusivamente del tiempo  $t$ :

$$u_0(t), \dots, u_{N+1}(t). \tag{31}$$

Cada función  $u_j(t)$  proporciona una aproximación de  $u(x, t)$  en el punto  $x_j = jh$  del mallado.

Hemos de introducir un sistema de EDO que determine las funciones  $\{u_j(t)\}_{j=0, \dots, N+1}$  de manera única y que proporcione una buena aproximación de  $u$ . Para ello, mediante el desarrollo de Taylor observamos que

$$u_{xx}(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) + u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t)}{h^2}.$$

Por lo tanto parece natural reemplazar la ecuación de ondas por las ecuaciones diferenciales

$$u_j''(t) - \frac{[u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)]}{h^2} = 0, t > 0$$

para los puntos interiores del mallado correspondientes a los índices  $j = 1, \dots, N$ .

Por otra parte, las condiciones de que la cuerda está fija en sus extremos se reflejan en que

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0, t > 0.$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\vec{u}'' + \frac{1}{h^2} A \vec{u} = 0, t > 0 \tag{32}$$

donde el vector  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)^t$  (excluimos los valores extremos  $u_0$  y  $u_{N+1}$  puesto que  $u_0 \equiv u_{N+1} \equiv 0$ ) siendo  $A$  la matriz tridiagonal  $N \times N$  con valor

constante 2 en la diagonal principal y con valor constante  $-1$  en las diagonales superior e inferior. En el caso  $N = 5$  esta matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Se trata de una matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva.

Los autovalores y autovectores de  $A$  se conocen explícitamente. Recordemos que el número  $\lambda$  es un autovalor de la matriz  $A$  si existe un vector  $e$  tal que  $Ae = \lambda e$ . En efecto, en el caso que nos ocupa,

$$\frac{1}{h^2} A \vec{\phi}^k = \lambda^k \vec{\phi}^k \tag{34}$$

si y solamente si

$$\lambda_k^k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right) \tag{35}$$

y (módulo una constante multiplicativa)

$$\vec{\phi}_h^k = \begin{bmatrix} \sin(k\pi h/L) \\ \sin(2k\pi h/L) \\ \dots \\ \sin(Nk\pi h/L) \end{bmatrix} \tag{36}$$

para  $k = 1, \dots, N$ .

Conviene observar que los autovalores y autovectores dependen de  $h = L/(N + 1)$  o, lo que es lo mismo, de  $N$ , puesto que la matriz  $A$  es de dimensión  $N \times N$ .

Conociendo el espectro de  $A$  se puede dar la expresión de la solución general de la semi-discretización (32). En efecto, tenemos

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=1}^N \left[ a_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^k} t \right) + b_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^k} t \right) \right] \vec{\phi}_h^k. \tag{37}$$

La expresión (37) es análoga a la obtenida en (24) para la solución general de la ecuación de ondas mediante series de Fourier. Conviene observar que:

- En (37) tenemos una suma finita para  $k = 1, \dots, N$ , pero  $N \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Es decir, la suma finita (37) se convierte en una serie de la forma (24) cuando el peso  $h$  del mallado se afina;

- Para cada  $k$  fijo, los autovalores

$$\lambda_h^k \rightarrow \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \quad (38)$$

cuando  $h \rightarrow 0$  que son los autovalores que surgen en la descomposición en series de Fourier (24) de las soluciones del problema continuo;

- Los autovectores  $\vec{\phi}_h^k$  no son más que la evaluación de las autofunciones  $\sin(k\pi x/L)$  del problema continuo en los puntos del mallado.

Por todo ello, (32) es, a todas luces, una buena aproximación de la ecuación de ondas (23). En realidad, no es difícil comprobar que, *conocidos los datos iniciales*  $\{u_0, u_1\}$ , si resolvemos (32) con los datos iniciales naturales

$$\begin{cases} u_j(0) = u_{0,j} = u_0(x_j), & j = 1, \dots, N \\ u'_j(0) = u_{1,j} = u_1(x_j), & j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (39)$$

las soluciones de (32) cuando  $h \rightarrow 0$  convergen a las de (23).

Un análisis un poco más riguroso de la proximidad entre (37) y (24) plantea de manera natural cómo de uniforme es la convergencia de los autovalores  $\lambda_h^k$  con respecto a  $k$ .

En la siguiente figura representamos las raíces cuadradas de los autovalores del problema continuo y del problema discreto para  $L = \pi$ .

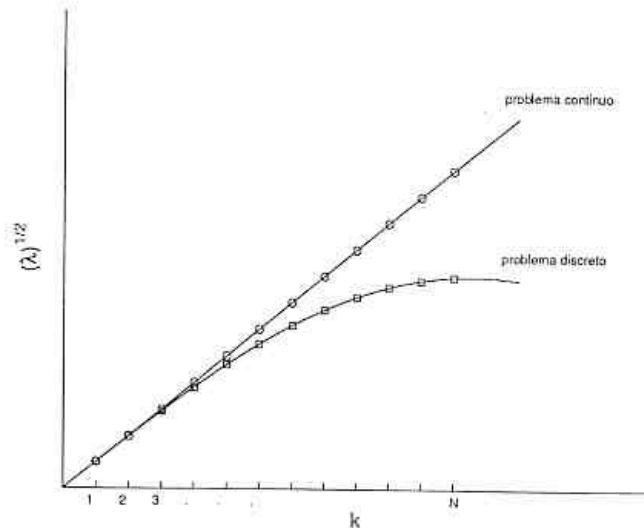


Figura 6.1.  
 Problema continuo:  $\sqrt{\lambda} = k$ .  
 Problema discreto:  $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{h} \sin(kh/2)$ .

Esta gráfica pone de manifiesto que la curva de autovalores del problema discreto se separa de manera importante de la curva (recta) correspondiente a los autovalores del problema continuo en cuanto  $k$  aumenta.

¿Qué repercusión tiene este hecho?

Volvamos al problema inverso analizado en la sección anterior en el que se trataba de identificar la longitud  $L$  de la cuerda a través de las mediciones de la tensión de sus vibraciones en el extremo  $x = 0$ . Obtuvimos una respuesta satisfactoria observando que las soluciones de la ecuación de ondas en el intervalo de longitud  $L$  son periódicas de período  $2L$ .

Calculemos ahora la tensión en  $x = 0$  asociada al sistema semi-discreto. Habida cuenta que

$$u_x(0, t) \sim [u(x_1, t) - u(0, t)]/h \quad (40)$$

parece natural definir la *tensión discreta* del siguiente modo:

$$\tau(t) = \frac{u_1(t)}{h}. \quad (41)$$

En virtud de (37) la tensión  $\tau(t)$  asociada a una solución del sistema semi-discreto (32) viene dada por

$$\tau(t) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left[ a_k \sin(\sqrt{\lambda_h^k} t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_h^k} t) \right] \sin\left(\frac{k\pi h}{L}\right). \quad (42)$$

Comparemos el comportamiento de las tensiones discretas (42) en relación a las de la cuerda vibrante real (que, sabemos, son funciones periódicas del período  $2L$ ).

Para hacerlo, consideramos soluciones particulares de (32) lo más simples posible. Para ello tomamos coeficientes

$$b_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (43)$$

y

$$a_k = 0, \quad k = 1, \dots, N-2; \quad a_{N-1} = \frac{h}{\sin((N-1)\pi h/L)}; \quad a_N = \frac{-h}{\sin(N\pi h/L)}, \quad (44)$$

de modo que la solución correspondiente de (32) sea

$$\vec{u}(t) = h \left[ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_h^{N-1}} t) \vec{\phi}_h^{N-1}}{\sin((N-1)\pi h/L)} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_h^N} t) \vec{\phi}_h^N}{\sin(N\pi h/L)} \right] \quad (45)$$

y la tensión discreta correspondiente

$$\tau(t) = \sin\left(\sqrt{\lambda_h^{N-1}}t\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda_h^N}t\right). \quad (46)$$

Es fácil comprobar que los coeficientes  $a_{N-1}$  y  $a_N$  son del orden de  $L/2\pi$  y  $-L/2\pi$  respectivamente cuando  $h \rightarrow 0$ . Por tanto la energía de la solución (45) del problema semi-discreto (45) es del orden de la unidad.

Sin embargo, ¿qué ocurre con la tensión semi-discreta  $\tau(t)$  de (46)?

Conviene observar que

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_h^N} &= \frac{2}{h} \sin\left(\frac{N\pi h}{2L}\right) = \frac{2}{h} \sin\left(\frac{((N-1)+1)\pi h}{2L}\right) \\ &= \frac{2}{h} \left[ \sin\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) + \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{L}\right). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_h^N} - \sqrt{\lambda_h^{N-1}} &= \sqrt{\lambda_h^{N-1}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \right] + \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi h}{L}\right) \\ &= O(h^2) \sqrt{\lambda_h^{N-1}} + O(h) = O(h). \end{aligned}$$

Utilizando entonces el desarrollo de Taylor vemos que

$$|\tau(t)| = O(h) |t|. \quad (47)$$

¿Qué quiere decir (47)?

Esta cota significa que, para detectar que la solución del problema semi-discreto tiene una energía total del orden de la unidad, habremos de medir su tensión durante un intervalo temporal del orden de  $1/h$ . Evidentemente, este fenómeno no hace más que agravarse cuando  $h \rightarrow 0$ , pues las mediciones habrían de hacerse en intervalos temporales que tienden a infinito.

De este modo se pone de manifiesto la inadecuación del esquema semi-discreto (32) a la hora de abordar el problema inverso de la determinación de la longitud de la cuerda a través de la tensión.

Y, sin embargo, tal y como habíamos mencionado, (32) es un esquema satisfactorio a la hora de obtener una buena aproximación de las soluciones de (23) para datos iniciales fijos.

¿Qué está ocurriendo entonces? En un problema inverso desconocemos absolutamente la forma en que la energía de las soluciones puede distribuirse

sobre las diferentes componentes de Fourier. Por ello, una convergencia puntual del espectro como en (39), para cada  $k$  fijo, es insuficiente y precisamos convergencias uniformes con respecto a  $k$ .

Pero, tal y como se desprende de la figura 6.1, en el caso presente, la rapidez de la convergencia se deteriora muy rápidamente cuando  $k$  aumenta.

¿Qué podemos hacer entonces? ¿Hay alguna forma de "arreglar" el esquema numérico (32) para garantizar su buen comportamiento en el problema inverso? Curiosamente esto puede hacerse pero a base de despreciar parte de la información que el esquema numérico proporciona.

Retomemos la solución (37) que el esquema numérico proporciona. De la figura 6.1 se desprende que la proximidad del espectro continuo y numérico mejora cuando nos limitamos a considerar autovalores correspondientes a índices  $k \leq \delta N$  con  $\delta > 0$  pequeño.

¿Qué ocurre entonces cuando truncamos la suma (37) para considerar

$$\vec{u}_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\delta N} \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right) \right] \vec{\phi}^k \quad (48)$$

con  $0 < \delta < 1$ ?

Evidentemente, al hacerlo, estamos despreciando parte de la información que el esquema numérico proporciona. Pero estamos precisamente despreciando aquéllo que corresponde a las altas frecuencias que producen las patologías que acabamos de describir.

Se puede efectivamente probar que la *solución filtrada* tiene un mejor comportamiento que la solución completa. En efecto, por una parte, para datos iniciales fijos y  $0 < \delta < 1$  también fijado, la solución truncada (48) del problema semi-discreto converge cuando  $h \rightarrow 0$  a la del problema continuo. Por otro, utilizando resultados clásicos de series de Fourier no armónicas (véase [IZ]), se puede probar que, en el contexto del problema inverso, las soluciones numéricas filtradas (48) tienen un buen comportamiento pues la medición de la tensión a lo largo de un intervalo temporal del orden de  $2\sigma(\delta)L$  proporciona una información completa sobre la solución.

De acuerdo con la figura 6.1 y el sentido común se observa que el parámetro  $\sigma(\delta)$  satisface:

- $\sigma(\delta) \rightarrow 1, \delta \rightarrow 0;$
- $\sigma(\delta) \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 1.$

¿Qué quiere esto decir?

Que a medida que  $\delta$  decrece, la solución numérica filtrada reproduce un comportamiento más próximo a la solución real del sistema continuo (23).

Nos encontramos así ante un hecho aparentemente paradójico. Filtrando más y más las altas frecuencias numéricas, i.e. usando cada vez menos información de todo lo que el esquema numérico proporciona, nos encontramos más cerca de la realidad.

Tal vez esto contribuya a que todos reflexionemos un poco sobre si la creciente capacidad de cálculo que los ordenadores proporcionan es, en sí misma, una garantía de progreso.

## Bibliografía

- [B] V.M. Babich, "The Higher-Dimensional WKB Method or Ray Method", en *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, **34**, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- [BR] A. Baratta y J. Rodellar eds., *Proceedings of the First European Conference on Structural Control*, Series on Stability, Vibration and Control of Systems, **13**, World Scientific, 1996.
- [Be] D. Bernoulli, Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748, *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, **9** (1753), 147-172 y 173-195.
- [Br] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, 1983.
- [CH] S. L. Campbell y R. Haberman, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor frontera*, McGrawHill, MÉxico, 1998.
- [CLOT] S.J. Chapman, J.M.H. Lawry, J.R. Ockendon y R.H. Tew, On the theory of complex rays, *SIAM Review*, **41** (3) (1999), 417-509.
- [CBBH] F. Cotton, P.-Y. Bard, C. Berge y D. Hatzfeld, ¿Qué es lo que hace vibrar Grenoble?, *Mundo Científico*, **203** (1999), 21-23.
- [D1] J.R. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, **3** (1747), 214-219 y Suite des recherches, **3** (1747), 220-249.
- [D2] J.R. d'Alembert, Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration, *Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin*, **6** (1750), 355-360.

- [F] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, Paris, 1988. (reedición del trabajo inicialmente editado por Firmin Didot, Père et Fils, en Paris en 1822).
- [IZ] J.A. Infante y E. Zuazua, Boundary observability for the space semi-discretizations of the  $1 - d$  wave equation, *M2AN*, **33** (2) (1999), 407-438.
- [I] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [J] F. John, *Partial Differential Equations*, 4. ed., Springer Verlag, Nueva York, 1982.
- [K] J. B. Keller, Semiclassical mechanics, *SIAM Rev.*, **27** (1985), 485-504.
- [KdV] D.J. Korteweg y G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Meq.*, **39** (1895), 422-423.
- [L] N. Luzin, Function: Part I, *Amer. Math. Monthly*, **105** (1998), 59-67; Part II. 263-270.
- [M] F. Macía, Ondas Gaussianas y aplicaciones a la observación, estabilización y control de vibraciones, Tesina, UCM, 1999.
- [N] A. Nachbin, Some Mathematical Models for Wave Propagation, *Cubo Matemática Educacional*, Universidad de la Frontera, Chile, en vías de publicación.
- [R] J. Ralston, Solution of the wave equation with localized energy, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 807-823.
- [SC] A. Sánchez-Calle, El problema espectral inverso. ¿puede oírse la forma de un tambor?, *Fronteras de la Ciencia*, CSIC, **14** (1997), 43-46.
- [Si] SIAM, *Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective*, SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.
- [T] M.E. Taylor, *Partial Differential Equations. Basic Theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [VSPG] L. Vázquez, L. Streit y V.M. Pérez-García, eds., *Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems: Theory and Applications*, World Scientific, 1996.



- [We] H. F. Weinberger, *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Reverté, Barcelona, 1986.
- [W] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Willey, Nueva York, 1974.