Una introducción histórica al Análisis Numérico, el Control y su docencia

November 9, 2004

Enrique Zuazua[1] Departmento de Matemáticas Universidad Autónoma 28049 Madrid, Spain `enrique.zuazua@uam.es`

1 Introducción: El Análisis Numérico de hoy desde una perspectiva histórica

La ponencia de Matemáticas del nuevo Plan Nacional 04-07 de I+D+i recientemente aprobado dice (http://www.mcyt.es/planidi/):

> *Las Matemáticas, la ciencia más antigua, constituye un edificio doctrinal cuyo potencial aumenta día a día. Aunque la esencia de las Matemáticas es abstracta, es un hecho que las Matemáticas han sido concebidas en el esfuerzo del ser humano para entender la Naturaleza (y actuar sobre ella) y que son de importancia capital para la sociedad moderna.*
>
> *La relación de las Matemáticas con las Ciencias y las Tecnologías es hoy en día un camino de ida y vuelta. En realidad, la historia de las Matemáticas nos muestra que esto ha sido siempre así.*

A esto podemos añadir que una de las disciplinas más relevantes fruto de esta interacción es la del Análisis Numérico a la que dedicaremos este ciclo de conferencias.

El Análisis Numérico es sin duda uno de los legados más importantes de las Matemáticas del Siglo XX en el que la irrupción y posterior desarrollo de las computadoras hizo necesario traducir las Matemáticas a un lenguaje comprensible para la máquina a la vez que ésta

[1]Parcialmente subvencionado por el proyecto BFM2002-03345 of the MCYT y la red europea “New materials, adaptive systems and their nonlinearities: modelling, control and numerical simulation (HPRN-CT-2002-00284)”.

hacía posible el sueño de realizar cálculos que en volumen y complejidad escapaban al ser humano. Esta disciplina, surgida en sus inicios como bifurcación del Análisis Matemático es hoy en día una de las más vigorosas y versátiles de las Matemáticas. Así, en los Congresos Internacionales de Matemáticas, [2] de las en torno a veinte secciones en las que se divide, hay al menos dos íntimamente ligadas a esta disciplina como son la de "Análisis Numérico" propiamente dicha y la de las "Matemáticas de la Computación". Por supuesto, el Análisis Numérico tiene una presencia importante en otras secciones como la de "Aplicaciones". Lo que ocurre en estos Congresos Internacionales no es más que un botón de muestra de lo que es la realidad matemática actual y del vigor de esta disciplina.

De esta introducción podría deducirse que la disciplina del Análisis Numérico data de hace medio siglo. Pero un análisis un poco más detallado de la historia de las Matemáticas indica que cuando los grandes científicos de la época (siglo XVIII esencialmente) desarrollaban el programa de Newton y establecían los principios y herramientas fundamentales del Análisis y del Cálculo Diferencial, estaban ya estableciendo los cimientos del Análisis Numérico. Esto fue primero con el objeto de construir el complejo edificio del Cálculo Diferencial a partir de la más simple aritmética, para después, ya en siglo XX, deshacer ese camino traduciendo las Matemáticas al lenguaje del ordenador.

En esta conferencia disertaremos sobre este tema evitando tecnicismos innecesarios, pero intentando mostrar el vigor y riqueza actual de la disciplina desde una perspectiva histórica inspirándonos en el excelente texto [2]. Con el objeto de ilustrar el éxito de la disciplina mostraremos y visitaremos las páginas web de algunos de los grupos líderes en el campo para mostrar el realismo y la complejidad de las simulaciones que se pueden obtener con estas herramientas.

Recordemos ahora brevemente cuál ha sido la evolución de esta disciplina en España.

En los años 70 y principios de los 80 el Análisis Numérico era nueva en nuestras licenciaturas. Se consideraba como una bifurcación del Análisis excesivamente heterodoxa y poca gente la dominaba en España.

En ella se recogían los ámbitos del Análisis Matemático más próximos al mundo de los ordenadores. Pero por aquel entonces, éstos se consideraban frecuentemente un tanto raros y de importancia secundaria. Además, con el objeto de implementar estas herramientas teóricas en el ordenador los alumnos se debían relacionar con ellos en extrañas sesiones en las que lo más difícil era perforar tarjetas... Los resultados llegaban tras una cierta espera y tenían poco de visual resultando compleja su interpretación.

La realidad informática es hoy totalmente otra. En muchos hogares disponemos de ordenadores personales en los que, mediante MatLab (http://www.mathworks.com/) y herramientas semejantes, se pueden hacer cálculos bastante sofisticados con facilidad y rapidez

[2] El próximo ICM06 se celebrará en Madrid (`http://www.icm2006.org`) en Agosto del 2006

y con unas extraordinarias posibilidades a la hora de visualizarlos, lo cual facilita su interpretación y permite utilizarlo como herramienta de diseño. Aproximar numéricamente el mundo de lo real y visualizar esa realidad en una pantalla están pues hoy al alcance de todos.

Se puede incluso ir mucho más allá en este paradigma. Así el ordenador puede utilizarse como herramienta para generar y visualizar realidades virtuales y de hecho hoy en día se utiliza de manera masiva en la generación de los efectos especiales en las películas más espectaculares.

Surge en ese ámbito un nuevo problema, que comentaremos más adelante: *¿ Hasta qué punto las simulaciones numéricas realizadas en el ordenador reproducen la realidad o nos muestran realidades virtuales inexistentes?* El lector interesado en este tema podrá consultar el arículo [5] donde esta cuestión se discute en el contexto de la ecuación de ondas $1-d$.

Pero volvamos por el momento sobre el tema anterior al que aludíamos sobre el Análisis Numérico en las Licenciaturas en España en los 70 y 80.

Por entonces el Análisis Numérico estaba conformado entorno a materias como:

- Interpolación de funciones;
- Fórmulas de cuadratura;
- Métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales;
- Métodos de aproximación de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO);
- Métodos en Diferencias y Elementos finitos para Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

Los profesores y por consiguiente los alumnos la percibían como materia nueva, recien surgida y por tanto que aún no había sido asimilada en el país.

Un análisis retrospectivo de lo ocurrido nos indica que las cosas no ocurrieron de ese modo, ni mucho menos y esto podía percibirse ya en los textos de Cournat-Hilbert [1], y/o de Isaacson-Keller [4], excelentes tratados aún vigentes en la materia y en la que se percibía el origen y la motivación de las mismas.

Tal y como decíamos, en aquella época el contacto con los ordenadores era difícil y escaso y por tanto esta asignatura, como todas las demás tenía un contenido eminentemente teórico, que se completaba con ejercicios y problemas. Lo que distinguía a esta materia de otras no eran pues tanto las prácticas de ordenador, ahora ya muy comunes, sino el que ésta no necesitaba del sofisticado lenguaje y bagage de conceptos de otras como la Topología, o la Teoría de la Medida. De hecho. esta aparenete simplicidad de lenguaje y conceptos, hizo que el Análisis Numérico tardase un cierto tiempo en ganarse un lugar entre los grandes de la clasificación matemática. Hoy en día ya no es así. Antes aludíamos al Congreso ICM y sus secciones. Para convenecerse de ello basta también la clasificación de las Matemáticas de la AMS (American Mathematical Society) (http://www.ams.org) universalmente aceptada en la catalogación de la investigación Matemática.

De hecho la disciplina del Análisis Numérico se ha desarrollado de manera tan espectacular no sólo a nivel teórico sino en la complejidad y dimensión de los problemas que permite abordar que hay quienes hablan de "Cálculo Científico". En cualquier caso, es obvio que ha surgido un nuevo paradigma científico fruto de la hibridación de las Matemáticas e Informática en cuyos orígenes y ámbitos de aplicación actuales intentaremos explorar a lo largo de este curso.

2 La formación en Matemática Aplicada en nuestras Facultades y Escuelas de Ingenieros

En vista de la reflexión anterior sobre el desarrollo histórico de la disciplina del Análisis Numérico, cabe plantearse qué conclusiones hemos de extraer en lo que se refiere a su docencia, más en general en la docencia en Matemática Aplicada. En esta sección discutimos brevemente este punto.

La preocupación sobre la formación de nuestros jóvenes licendiados en las disciplinas propias de lo que hoy en día se conoce como Matemática aplicada, es compartida por todos los que estamos implicados en las licenciaturas de Matemáticas y ha sido recogida ya en el Libro Blanco recientemente editado por encargo de la ANECA. Por otra parte, está aÚn abierto el debate de cómo conseguir que la formación de nuestros jóvenes licenciados sea más completa en relación a lo que debería ser una visión más multidisciplinar de la Ciencia y la Tecnología. De hecho, muy recientemente se han celebrado unas Jornadas de Modelización en la Facultad de Matemáticas de la UCM organizadas por la Comisión de Educación de la RSME para analizar esta cuestión. Se trata pues de un tema de indudable interés en el que se trabaja en la actualidad pero en el que las soluciones no son del todo obvias, especialmente en el nuevo escenario de Bolonia en el que nuestras licenciaturas no sólo están destinadas a los estudiantes españoles sino a todos los europeos. Es en este contexto del Espacio Único de Educación Superior donde el debate está todavía abierto y esperando aportaciones de la comunidad matemática española.

Sin embargo rara vez se hace alusión a las Ingenierías en las que la presencia de las Matemáticas es también importante y lo es en particular de cara a esa mejora que se señala como tan necesaria en la investigación en Matemática Aplicada. Podría interpretarse que esto es así porque se considera que las matemáticas que se enseñan en las Escuelas de Ingeniería son perfectas uniforme y homogéneamente. Podría también pensarse que se considera que ese tema es carente de interés. Ninguna de esas dos posibles interpretaciones parece corresponder a la realidad. En efecto, si bien es cierto que las Facultades de Matemáticas han de mejorar en el ámbito de la docencia de la Matemática Aplicada no lo es menos que las escuelas de Ingeniería españolas han de recorrer un importante camino para que podamos disponer en nuestro país de Escuelas Politécnicas de referencia internacional donde los alumnos tengan la posibilidad de complementar su formación en ingeniería con una importante base científica y en particular matemática como ocurre en centros tales como la Ecole Polytechnique de Paris, el Politécnico de Milano o la Ecole Polytechnique Federale de Lausanne en Suiza, por citar algunos centros de nuestro entorno más próximo.

3 La Teoría del Control

La primera pregunta que cabe hacerse es si debemos de referirnos a esta disciplina como la Teoría Matemática del Control, de la Ingeniería del Control o del Control a secas pues se trata de un area de investigación multidisciplinar entre las Matemáticas y la Ingeniería, con importantes conexiones con las Ciencias de la Computación, la Tecnología, las Telecomunicaciones,...

3.1 Los orígenes y la evolución de la disciplina

Aristóteles (384-322 A. C.) en el Capítulo 3, Libro 1, de la monografía "Politics" dice blue

> "...si cada instrumento pudiese realizar su tarea, respondiendo o anticipándose a la necesidad de los otros ...si la lanzadera tejiese y la púa tocase el arpas in una mano que los guiara, los patronos no necesitarían ni sirvientes ni capataces."

En esta frase se sintetiza bien la principal motivación del Control: La necesidad de automatizar procesos para que el ser humano gane en libertad y calidad de vida.

Las raices de la Teoría del Control nos llevan hasta teimpos muy remotos. Estos son algunos ejemplos:

- Sistemas de irrigación, antigua Mesopotamia, 2000 AC.
- Harpenodaptai, antiguo Egipto, los estiradores de cuerdas.

  Ellos habían entendido ya la importancia de la relación "Primal-Dual" que constituye una de las piedras angulares de la Teoría del Control.

  * Problema primal: La distancia más corta entre dos puntos está dada por la línea recta.

  * Problema dual: La máxima distancia entre los dos extremos de una cuerda se obtiene cuenado ésta adopta una configuración rectilínea.

  Desde un punto de vista matemático el problema no es simple: Se trataría de minimizar el funcional

$$\int_0^1 ||x'(t)||dt$$

en el conjunto de las curvas parametrizadas $x : [0,1] \to \mathbf{R}$, tales que $x(0) = A$ y $x(1) = B$.

Se trata de un ejemplo concreto del problema de las geódesicas. Su resolución nos obliga a salirnos del contexto Hilbertiano y a analizar el problema en el contexto de las funciones de Variación Acotada (BV).

- Acueductos Romanos. Sistemas de transporte de agua provistos de válvulas y reguladores.

- El péndulo. Los trabajos de Ch. Huygens and R. Hooke, al final del siglo XVII, en los que se abordaba el problema de la medición del posicionamiento y el tiempo, tan importante en navegación.

- Reguladores de molinos de viento. Aplicado más tarde por J. Watt (1736-1819) a la máquina de vapor, el motor de la revolución industrial.

  El primer análisis riguroso de la estabilidad de los mecanimos de feedback y en particular del regulador de la máquina de vapor fue realizado por Lord J. C. Maxwell, en 1868 mediante las herramientas de la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

  En este trabajo se explicó el comportamiento aparentemente errático de estos dispositivos. De este modo se explicó que mecanismos más pulidos y elaborados pudiesen tener un comportamiento menos estable.

  Se trata del conocido fenómeno del overdamping o la sobredisipación.

  Consideramos el péndulo :

  $$x'' + x = 0,$$

  que describe una dinámica conservativa puesto que la energía

  $$e(t) = \frac{1}{2}[x^2(t) + |x'(t)|^2]$$

  se conserva en el tiempo.

  Introducimos ahora un término de fricción:

  $$x'' + x = -kx',$$

  siendo k una constante positiva $k > 0$.

  La energía decae ahora exponencialmente. pero la tasa de decaimiento no necesariamente aumenta con k.

En efecto, calculando las soluciones del polinomio característico:

$$\lambda_{\pm} = [-k \pm \sqrt{k^2 - 4}]/2.$$

se ve que λ_{+} crece cuando $k > 2$ crece.

Esto confirma el hecho de que los controles óptimos son con frecuencia complejos y que no obedecen a la primera intuición.

- Control automático. El número de aplicaciones creció vertiginósamente a partir de la década de los treinta cubriendo diferentes areas: amplificadores en telecomunicaciones, sistemas de distribución eléctrica, producción de papel, estabilización de aviones, industria del petroleo, del acero,....

Para entonces ya se distinguían dos puntos de vista matemático diferenciados:

- El punto de vista del espacio de estado, basado en la modelización mediante EDO's.
- El punto de vista frecuencial basado en la representación de Fourier de las seales.

ESPACIO FISICO $\equiv$ ESPACIO DE FRECUENCIAS

Pero después de la segunda guerra mundial se descubrió que la mayoría de sistemas tenían una naturaleza blue nonlineal y blue no determinista.

A partir de los a nos 60 se realizaron importantes contribuciones que han marcado la realidad actual de la disciplina. Entre ellas cabe mencionar.

- Kalman y su teoría del filtrado y su aproximación algebraica de los problemas de control;
- Pontryagin y su Principio del Máximo, generalización de los multiplicadores de Lagrange;
- Bellman y su principio de Programación Dinámica:

  Una trayectoria es óptima en un tiempo dado si lo es en todos los instantes precedentes.

Recordfemos brevemente el resultado de Kalman sobre la controlabilidad de sistemas de dimensión finita.

Sean $n, m \in N^*$ y $T > 0$. Consideremos el siguiente sistema finito-dimensional:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in (0,T), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

A es una matriz real $n \times n$, B es una matriz real $n \times m$ y x^0es un vector de R^n. La función $x : [0,T] \longrightarrow R^n$ representa el *estado* y $u : [0,T] \longrightarrow R^m$ el blue*control*.

Buscamos controlar un sistema de n componentes con m controles. ¿Es posible ? ¿Podríamos llegar a controlar un sistema con muchas componentes n con muy pocos controles, por ejemplo, $m = 1$?

Más vale maña que fuerza.

Theorem 3.1 *El sistema* (3.1) *ies controlable en algún tiempo T si y solo si*

$$rank[B,\ AB, \cdots, A^{n-1}B] = n. \tag{3.2}$$

En particular, si el sistema es controlable para algún tiempo lo es en todo tiempo.

Buscamos el efecto dominó!

En los últimos 40 años se han realizado también avances importantes:

- problemas no lineales;

  Algebras de Lie.

  Ejercicio: Pensemos en como aparcamos y desaparcamos un vehículo...

- Modelos estocásticos;

  Los seres humanos introducimos incertidumbres añadidas al intervenir el manipulación de cualquier sistema...

- Sistemas en dimensión infinita= EDP's de la Mecánica de Medios continuos.

El Control de EDP's (Ecuaciones en Derivadas Parciales) es relevante y el carpropio de los modelos de la Mecánica de Medios Continuos y su carácter intrínsecamente infinito-dimensional no puede ser obviado. Los ejemplos son múltiples:

- Reducción del ruido en vehículos.

  Ecuaciones de ondas acústicas, materiales y dispositivos inteligentes,...

- Computación y Control Cuántico.

  Control Laser para diseñar configuraciones moleculares coherentes.

  La ecuación de Schrödinger (una ecuación de ondas con velocidad infinita de propagación.)

  Véase por ejemplo el siguiente artículo introductorio al tema: *P. Brumer and M. Shapiro, Laser Control of Chemical reactions, Scientific American, March, 1995, pp.34-39.*

- Ondas sísmicas, terremotos.

  Véase *F. Cotton, P.-Y. Bard, C. Berge et D. Hatzfeld, Qu'est-ce qui fait vibrer Grenoble?, La Recherche, 320, Mai, 1999, 39-43.*

- Estructuras flexibles.

  Véase la cubierta del informe *SIAM Report on "Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective", W. H. Fleming et al., 1988.*

- Y muchas otras...

  En este punto sugerimos al lector que lea el nuevo informe de la sociedad SIAM: *Control in an information rich World, SIAM, R. Murray Ed., 2003.*

3.2 Formulación de un problema de control en el lenguaje actual

En la actualidad un problema típico de control se formula de manera matemática del modo siguiente. tenemos por una parte la ecuación de estado

$$A(y) = f(v), \tag{3.3}$$

siendo y el estado a controlar y v el control que pertenece al conjunto de controles admisibles $\mathcal{U}_{ad}$.

Esencialmente, el problema consiste en conducir el estado y lo más cerca posible de la configuración deseada y_d:

$$y \sim y_d.$$

En este marco abstracto caben muchos problemas, con formulaciones matemáticas muy diversas y en los que los modelos matemáticos implicados pueden también tener diferentesw formas:

- Problemas lineales versus nolineales;
- Modelos deterministas versus estocásticos;
- Modelos finito dimensionales versus infinito dimensionales;
- Modelos discretos versus continuos;

Los problemas de control que caben en esta formulación son también muy diversos, dependiendo de como se plasme el objetivo de conducir el estado cerca de la configuración deseada.

- Control Óptimo (relacionado con la Optimización y el Cálculo de Variaciones)

$$min_{v\in}||y - y_d||^2.$$

- Controlabilidad: Conducir exactamente el estado y al estado prescrito y_d.

  Esta es una noción de carácter más dinámico.

- Estabilización o control feedback (control en tiempo real...)

$$v = F(y); \quad A(y) = f(F(v)).$$

3.3 Algunos de los ingredientes principales de la Teoría del Control

En primer lugar hemos de mencionar el concepto de feedback. Insipirado en la capacidad de los organismos biológicos de autoregular sus funciones. Concepto incorporado a la Ingeniería del Control en los años 20, por los ingenieros del "Bell Telephone Laboratory". Por entonces ese concepto ya estaba reconocido en otras disciplinas como la Economía.

Proceso de Control-Feedback : aquél en el que una "caja negra" determina el modo en que el control ha de ser elegido, en tiempo real, a partir de determinadas mediciones del estado.

Los procesos feedback son hoy en día ubicuos en Ingeniería, Economía, Biología, Fisiología, ...

Algunos ejemplos:

- El termostato;

- El control de aviones en vuelo:

- Reducción del ruido:

  La necesidad de las fluctuaciones.

> "It is a curious fact that, while political economists recognize that for the proper action of the law of supply and demand there must be fluctuations, it has not generally been recognized by mechanicians in this matter of the steam engine governor. The aim of the mechanical engineers, as is that of the political economist, should be not to do away with these fluctuations all together (for then he does away with the principles of self-regulation), but to diminish them as much as possible, still leaving them large enough to have sufficient regulating power."

H.R. Hall, *Governors and Governing Mechanisms*, The Technical Publishing Co., 2nd ed., Manchester 1907.

Por consiguiente, los controles y las trayectorias óptimas son con frecuencia complejas, poco intuitivas, difíciles de predecir y de computar.

La Teoría del Control proporciona medios analíticos y computacionales sistemáticos para el cálculo de estas estrategias óptimas.

Un ejemplo: Multiplicadores de Lagrange.

$$\min_{g(x)=c} f(x).$$

La respuesta: los puntos críticos x son aquellos para los que

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

para algún real λ.

Otro término que juega un papel central en la Teoría del Control es el de Cibernética.

El término “Cybernétique” fue propuesto por el físico francés A.-M. Ampère en el siglo XIX al referirse a la aún no existente ciencia del control de procesos.

El concepto se olvidó hasta que en 1948, N. Wiener (1894–1964) lo eligió como título de su célebre libro.

Wiener definió la Cibernética como “ la ciencia de la comunicación y el control en animales y máquinas”.

De este modo estableció la conexión entre Teoría del Control y la Fisiología y anticipó que en un futuro las máquinas diseñadas por el hombre simularían su comportamiento.

En términos matemáticos esto corresponde a la bien conocida dualidad en análisis convexo.

PRIMAL =DUAL

CONTROL= COMUNICACIÓN

3.4 Conclusión

La Teoría del Control está repleta de fascinantes e importantes cuestiones matemáticas complejas.

El Control se enriquece permanentemente por su permanente interacción con las aplicaciones.

Esta interacción funciona en ambas direcciones:

* la teoría matemática proporciona la comprensión necesaria para mejorrar los dispositivos que necesitamos;

* Las aplicaciones formulan cuestiones de complejidad creciente.

4 Algunas reflexiones sobre la docencia del Control y los PPEE

- Consideramos que es importante que los jóvenes matemáticos en formación tengan acceso a elementos básicos de esta disciplina no sólo a través de contenidos matemáticos sino también con la posibilidad de vislumbrar su importancia real.
- A pesar de la sofisticación de las teorías actuales hay algunos elementos fundamentales que hemos descrito en esta charla y otros muchos que pueden ser explicados de manera perfectamente accesible a los alumnos de todos los ciclos, sin que por eso se pierda en absoluto la profundidad de los conceptos y resultados subyacentes.
- Desde mi punto de vista es difícil y posiblemente innecesario establecer las fronteras entre la Optimización, la Investigación Operativa, el Control, el Cálculo de Variaciones. Lo es más aún a nivel puramente docente.
- Los elementos más importantes de estas teorías pueden y deben ser descritos en bluelas diferentes materias de la carrera:

  * Geodésicas / Geometría;

  * Mínimos cuadrados / Algebra Lineal;

  * Control y estabilización de un sistema lineal / EDO's;

  * Multiplicadores de Lagrange / Cálculo o Análisis;

  * Cálculo de Variaciones / Análisis o EDO's,...

  .....
- Creemos que sería oportuno recoger parte de estas materias en un bloque de los futuros PPEE si hubiese espacio para ello. Creo sin embargo que sería improcedente hacerlo sólo con algunas de las subdisciplinas mencionadas pues restaría a este bloque utilidad formativa y lo alejaría de la realidad científico-tecnológica.

Así, el bloque previsto en el último estudio encargado por la ANECA y dedicado a la Investigación Operativa, podría/debería recoger los elementos básicos adoptando una denomicación más abierta: OPTIMACIÓN Y CONTROL?

Hay para esto razones históricas: los orígenes y tipo de problemas abordados son semejantes.

Resulta sumamente enriquecedor para el alumno ver como el mismo problema práctico puede formularse de manera muy distinta con herramientas del Algebra, de la Geometría, del Análisis,... y entender que esto no corrresponde sólo a una cuestión de disciplinas matemáticas sino de modelización: Al elegir un modelo u otro estamos ya optando por un tipo de matemáticas.

- El abordaje de estos contenidos matemáticos tiene que producirse en paralelo a una formación en el ámbito de la modelización: discreta, combinatoria, Mecánica Clásica, Mecánica del Continuo,....
- Este bloque de "Modelización" ha de figurar en los PPEE con contenidos y objetivos definidos y no convertirse en una "María" o mero "cajón de sastre".
- Conviene distinguir el bloque de "Modelización" de lo que debe ser un bloque de "Prácticas o Aplicaciones", también interesante de cara a la formación del joven para su adaptación al mercado de trabajo.
- Estas cuestiones exceden el ámbito de los PPEE de la Licenciatura de Matemáticas y tienen mucho que ver con una de las grandes asignaturas pendientes de nuestro sistema I+D+i: conseguir una mayor interacción entre investigación de base y desarrollo tecnológico.

Buena parte de estas reflexiones fueron recogidas en los informes realizados por la Comisión de Educación de la RSME y por la Sociedad SEMA, realizados en el proceso de debate que acompañó a la realización del informe encargado por la ANECA.

A nuestro entender este proyecto necesita aún algunos retoques, menores cuantitatívamente, pero que pueden influir de manera decisiva en una mayor adecuación a las necesidades actuales de adaptación de nuestra Licenciatura de Matemáticas a los futuros escenarios de la Sociedad europea.

References

[1] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Wiley Interscience, 1962.

[2] E. Hairer y G. Wanner. Analysis by its History, Springer, 2000.

[3] H. H. Golstine.A History of Numerical Analysis. From 16th through the 19th century. Springer Verlag, 1977.

[4] E. Isaacson and H.B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, 1966.

[5] E. ZUAZUA, Ondas continuas y discretas, Actas del Curso de Formación de Profesorado: Temas relevantes de la Matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria, Secretaría General Técnica, Central de Publicaciones del MEC/UIMP, Madrid, 2000 y Boletín SEMA, 16, 2000, pp. 13-44.