PROBLEMAS DE ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Los problemas que en su numeración están señalados mediante una A, son de carácter más avanzado y, por tanto, pueden dejarse de la lado en un primer repaso de la lista.

PROBLEMAS DE MATRICES

$\boxed{1}$ **Matrices circulantes.**

Las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_{d-1} \\ k_{d-1} & k_0 & k_1 & \dots & \dots & k_{d-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & k_1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & \dots & k_0 \end{bmatrix}$$

se dicen circulantes.

Introducimos el polinomio

$$k(z) = \sum_{\ell=0}^{d-1} k_\ell z^\ell$$

que caracteriza a dicha matriz.

Prueba que los autovalores de la matriz son $k\left(\omega_d^j\right)$, $j = 0, \cdots, d-1$, donce k es el polinomio anterior y $\omega_d = \exp(2\pi i/d)$ es la $d-$ésima raiz de la unidad.

Demuestra que el autovector correspondiente al autovalor $\lambda_j = k\left(\omega_d^j\right)$ es

$$W_j = \begin{bmatrix} 1_j \\ \omega_d \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega_d^{(d-1)_j} \end{bmatrix}, j = 0, 1, \dots, d-1.$$

$\boxed{2}$ Demuestra que el método iterativo de Gauss-Seidel para el sistema

$$Ax = b$$

converge cuando A es estrictamente diagonal dominante.

$\boxed{3}$ • Consideremos la matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prueba que el método de Jacobi diverge pero que el de Gauss-Seidel converge.

- Comprueba que para la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

se está en la misma situación.

- Reordenamos esta matriz para obtener

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prueba que ambos métodos divergen.

- Definimos por último A_ε la matriz que se obtiene a partir de A_3 sumando $\varepsilon > 0$ en su diagonal. Prueba que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño el método de Jacobi converge pero el de Gauss-Seidel diverge.

- ¿Qué podemos concluir?

$\boxed{4}$ • Comprueba que si A es una matriz TST con α en la diagonal principal y β en las dos subdiagonales, los autovalores y autovectores son

$$\lambda_j = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{\pi j}{d+1}\right),\ j = 1, \cdots, d$$

$$\overrightarrow{q}_j = (q_{j,\ell}) : q_{j,\ell} = \sqrt{\frac{2}{d+1}} \sin\left(\frac{\pi j \ell}{d+1}\right),\ j, \ell = 1, \cdots, d.$$

- Concluye que las matrices TST conmutan entre si.

$\boxed{5}$ Comprueba la identidad

$$\mathbb{D} \sum_{\ell=1}^{d} \sin^2\left(\frac{\pi_j \ell}{d+1}\right) = \frac{1}{2}(d+1),\ j = 1, 2, \cdots, d.$$

$\boxed{6}$ Consideramos la matriz de Toeplitz $d \times d$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula los autovalores de la matriz B que interviene en la iteración de Jacobi y comprueba que diverge.

$\boxed{7}$ Sea A una matriz TST con $a_{1,1} = \alpha$ y $a_{1,2} = \beta$. Prueba que la iteración de Jacobi converge cuando $2 \mid \beta \mid < \mid \alpha \mid$. Prueba asimismo que si se requiere la convergencia cualquiera que sea la dimensión de la matriz, esta condición es necesaria y suficiente.

$\boxed{8}$ Sea B una matriz normal $d \times d$ y $y \in \mathbb{C}^d$ t.q. $\| y \| = 1$.

- Prueba que existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ tales que

  $$y = \mathbb{D} \sum_{k=1}^{d} \alpha_k W_k,$$

  siendo $W_1, \cdots, W_d$ los autovectores de B.
  Expresa $\| y \|^2$ explícitamente en función de los coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$.
- Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_d$ los autovalores de B. Prueba que

  $$\| By \|^2 = \mathbb{D} \sum_{k=1}^{d} \mid \alpha_k \lambda_k \mid^2 .$$

- Deduce que $\| B \| = \rho(B)$.

$\boxed{\text{A9}}$ Demuestra la relación

$$R = \frac{1}{4} P^T$$

que se verifica entre el operador de restricción R y el prolongamiento P del método multimalla.

¿Cómo definirías estos operadores en tres dimensiones espaciales? ¿Existe en este caso alguna relación semejante a (**??**)?

PROBLEMAS GENERALES DE EDO

$\boxed{1}$ Consideramos el problema de valores iniciales,

$$\dot{y} = f(y), \qquad y(t_0) = 1. \tag{1}$$

donde f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$, tal que todas sus derivadas $f^{(k)}$ están acotadas; i.e., $|f^{(k)}(y)| \leq A_k < \infty$, para todo y real. Sea $\{y_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión generada por el θ-método

$$y_{n+1} = y_n + h\Big[\theta f(y_{n+1}) + (1-\theta) f(y_n)\Big], \qquad \theta \in [0,1], \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

comenzando en cierto y_0, que aproxima a $y(t_0)$, y usando la red equiespaciada de puntos $t_n = nh,\ n = 0, 1, \ldots$, con $h = 1/N$ y $N \in \mathbb{N}$.

a) Derivando en la ecuación (3) comprueba que se pueden acotar las derivadas de la solución $y(t)$, en función de las constantes A_k.

b) Indica, en función de las constantes A_k, una cota para el error de truncación de dicho método al aproximar el problema (3). Si es necesario, distingue casos dependiendo del valor del parámetro θ. Discute el orden de consistencia del método en función del parámetro θ.

c) Obten una fórmula implícita para el error $e_{n+1} = y(t_{n+1} - y_{n+1}$ en función del error del paso anterior e_n. Demuestra que, para h suficientemente pequeño en función de la constante de Lipschitz de f, se puede obtener una cota de $|e_{n+1}|$ en función de $|e_n|$.

d) Iterando la desigualdad del apartado anterior, deduce una cota para el error global $|y(t_n) - y_n|$ cometido al aproximar la solución de (3), con el θ-método. Dicha cota debe depender, de las constantes A_k, del error cometido al aproximar la condición inicial y de la longitud del intervalo $[t_0, T]$, donde se ha efectuado la aproximación. Comenta la convergencia del método en función del parámetro θ.

e) Estudia, en función de θ, el dominio de estabilidad lineal de (2). Determina si el método es A-estable para algún valor del parámetro θ. En caso de no serlo, calcula el máximo intervalo de estabilidad absoluta del método. ¿Son coherentes los resultados sobre convergencia que se deducen de este apartado con los obtenidos anteriormente? Razona la respuesta.

f) Generaliza los resultados anteriores al caso en que y es una incógnita vectorial. ormente? Razona la respuesta.

$\boxed{2}$ Consideramos el problema de valores iniciales,

$$\dot{y} = f(y), \qquad y(t_0) = 1. \tag{3}$$

y los dos siguientes métodos de dos pasos:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = h\left[\frac{13}{12} f(y_{n+2}) - \frac{5}{3} f(y_{n+1}) - \frac{5}{12} f(y_n)\right], \tag{4}$$

$$y_{n+2} - y_n = 2hf(y_{n+1}). \tag{5}$$

(a) Comprueba que ambos métodos son de orden dos y enuncia con precisión el significado de esta propiedad.

(b) Demuestra que el método (4) no converge pero que, sin embargo, el método (5) es convergente. Enuncia con precisión el significado de estas afirmaciones.

Indicación: Recuerda que, según la condición de equivalencia de Dahlquist, el método multipaso

$$\sum_{m=0}^{s} a_m y_{n+m} = h \sum_{m=0}^{s} b_m f(y_{n+m})$$

es convergente si es de orden ≥ 1 y el polinomio $\rho(w) = \sum_{m=0}^{s} a_m w^m$ verifica la condición de las raices (i.e. todos sus ceros está en el disco unidad cerrado del plano complejo y los que son de módulo unidad son simples).

(c) Verifica que los ceros $w_1(z)$ y $w_2(z)$ del polinomio

$$\eta(z,w) = \sum_{m=0}^{s} (a_m - b_m z) w^m$$

asociado al esquema (5) satisfacen

$$w_1(z) w_2(z) = -1, \quad \forall z. \tag{6}$$

(d) Deduce que el dominio de estabilidad $\mathcal{D}$ del esquema (5) es el conjunto vacío y que por tanto el esquema (5) no es A-estable. Enuncia el significado de este hecho.

Indicación: El dominio de estabilidad de estabilidad de un esquema multipaso es el conjunto de los z del plano complejo para los que todos los ceros de $\eta(z,\cdot)$ satisfacen $|w(z)| < 1$.

e) ¿Existe alguna contradicción entre los dos hechos que hemos probado sobre el esquema (3) (i.e. es convergente pero no es A-estable)?.

f) Supongamos ahora que aplicamos el método (5), para resolver la ecuación

$y' = -y, \; y(0) = 1$ con las siguientes eleccciones de los datos iniciales:

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = 1 - h, \tag{7}$$

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = 1 - h + \frac{h^2}{2}, \tag{8}$$

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = exp(-h), \tag{9}$$

$$y_0 = 1 + C_0 h^3, \qquad y_1 = exp(-h) + c_1 h^3, \;\; c_0, C_1 > 0 \tag{10}$$

¿Cuáles de estas elecciones de datos inciales dan lugar a una ¿sucesión $\{y^n\}_{n\geq 0}$ convergente (con el orden del método (5)) a la verdadera solucion del problema? Razona brevemente la respuesta.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

$\boxed{1}$ Probar que el método de Runge-Kutta explícito (RKE) dado por

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

es de orden cuatro en el caso de una ecuación escalar $y' = f(y)$.

$\boxed{2}$ Escribe el método θ como un método R-K.

$\boxed{3}$ Comprueba que los métodos de RKE de tres etapas dados por

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/8 & 3/8 \end{array}$$

y denominados respectivamente el método de RK clásico y el de Nystrom son de orden 3.

$\boxed{4}$ Comprueba que el método de RKI (I= implícito)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

es de orden 3.

$\boxed{5}$ ¿Existe algún método de RK explícito de 2 etapas que sea de orden 3?

PROBLEMAS SOBRE LA ECUACION DE LAPLACE

$\boxed{1}$

- Comprueba que al abordar la resolución del problema de Neumann para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

en 1−variable mediante elementos finitos P_1 se obtiene un sistema de la forma

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = F = \begin{pmatrix} F_0 \\ | \\ F_{N+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Introducimos un nodo ficticio en el mallado $x_{-1} = -h$.

- Compara la ecuación correspondiente al nodo u_0 en (2) con la que se obtendría mediante la discretización clásica por diferencias finitas en el punto x_0 haciendo uso de u_{-1}, aproximación de u en x_{-1}.
- Implícitamente en (2) estamos asignando un valor a priori en x_{-1} según lo que acabamos de ver. ¿Cuál es?
- Comenta este hecho en relación a la propiedad clásica de las soluciones de (1) según la cual, si extendemos f y u de manera par, i.e.

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(-x), & -1 < x < 0 \\ u(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(-x), & -1 < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

$\widetilde{u}$ es una solución de la misma ecuación con segundo miembro $\widetilde{f}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

- Comprueba que esto es efectivamente así.
- Comprueba que para el problema de Dirichlet se tiene la misma propiedad mediante la extensión impar.

$\boxed{2}$ Suponemos que $f(x)$ es lineal a trozos, i.e.

$$f(x) = \mathbb{D}\sum_{j=1}^{N} f_j \phi_j(x),$$

donde ϕ_j son las funciones de base usuales en el método de elementos finitos lineales a trozos.

- Escribe el sistema que se obtiene a la hora de aproximar la solución de

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

  mediante diferencias finitas y elementos finitos P_1.
- Comenta las diferencias.
- ¿Para qué funciones f coinciden ambos sistemas?

$\boxed{3}$

- Escribe una aproximación en diferencias finitas para el sistema

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u_x(1) = 0. \end{cases}$$

- Obten el orden de convergencia del método.
- Haz lo mismo para las condiciones de Neumann

$$u_x(0) = u_x(1) = 0.$$

- ¿En este último caso, cómo se refleja el problema de no unicidad que exige en el modelo continuo imponer la media de la solución para identificarla de manera única?

$\boxed{4}$

- Escribe una aproximación mediante elementos finitos P_1 de la ecuación

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u_x(1) = 0 \end{cases}$$

  y analiza su convergencia.
- En este caso, ¿es necesario imponer condiciones sobre f para garantizar la existencia y unicidad de la solución?

$\boxed{5}$ Consideramos ahora los tres sistemas anteriores con condiciones de contorno no-homogéneas

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(x) = a, & u(1) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = a, & u_x(1) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u_x(0) = a, & u_x(1) = b. \end{cases}$$

- Escribe la aproximación correspondiente mediante elementos finitos P_1.

- ¿Es necesario realizar un análisis exhaustivo para obtener el orden de convergencia o puede obtenerse reduciendo el problema al caso de las condiciones de contorno homogéneas?

$\boxed{6}$ Consideramos la ecuación de equilibrio de una viga posada en sus extremos:

$$\begin{cases} d_x^4 u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 & \\ u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0. & \end{cases}$$

- Comprobar que se verifica el principio del máximo.
- Escribir un esquema de aproximación mediante diferencias finitas.
- ¿Hay alguna relación entre la matriz del sistema que se obtiene y la que se tenía para la ecuación de Laplace?
- Analiza la convergencia del método y su orden.
- ¿Se verifica el principio del máximo en la aproximación discreta?
- Comprueba que la ecuación puede escribirse en forma equivalente como un sistema de dos ecuaciones de orden 2:

$$\begin{cases} -u_{xx} = v, & 0 < x < 1 \\ -v_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 & \\ v(0) = v(1) = 0. & \end{cases}$$

- Apoyándote en este hecho escribe un método de aproximación mediante elementos finitos P_1.
- Compara el sistema discreto obtenido con el que se obtiene mediante diferencias finitas.

$\boxed{7}$ • Probar que los autovalores y autovectores de la matriz que se obtiene al aplicar la fórmula de cinco puntos para la resolución de la ecuación de Laplace en el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$ con condiciones de Dirichlet homogéneas son:

$$\lambda_{\alpha,\beta} = -4\left[\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2(m+1)}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta\pi}{2(m+1)}\right)\right]$$
$$\overrightarrow{V}_{\alpha,\beta} = (V_{k,\ell}) : V_{k,\ell} = \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{m+1}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi\beta}{m+1}\right),$$

$\alpha = 1, \cdots, m,\ \beta = 1, \cdots, m;\ k, \ell = 1, \cdots, m.$

- Comprobar que los autovalores y autofunciones del Laplaciano son

$$\lambda_{\alpha,\beta} = -\pi^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$
$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \sin(\alpha\pi x)\sin(\beta\pi y).$$

- Comentar las semejanzas.

$\boxed{8}$ Adaptar la fórmula de cinco puntos para el Laplaciano al caso en que el cuadrado se divide en triángulos idénticos y en cada punto del mallado se consideran, además del propio punto, los otros seis que están conectados con él a través de lados de triángulos. ¿Cuál es el orden del método? Considerar el caso en el que los triángulos son equiláteros y en el que el triángulo de referencia tiene vértices $(0,1),(1,0),(0,0)$.

$\boxed{9}$ ¿Se cumple el principio del máximo cuando empleamos el esquema de cinco puntos para resolver la ecuación unidimensional

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. & ? \end{array} \right.$$

$\boxed{10}$ Comprueba mediante el criterio de Gerschgorin que la matriz que se obtiene al discretizar mediante elementos finitos P_1 la ecuación del problema anterior es inversible. ¿Se puede hacer lo mismo cuando las condiciones de contorno son las de Neumann?

$\boxed{11}$ Extender el esquema de cinco puntos para el Laplaciano en un cuadrado al caso en que se involucran 9 puntos (incorporando los cuatro que están colocados sobre las diagonales que pasan por el punto central).

¿Cuál es el orden de convergencia del método?

$\boxed{12}$ Generalizar la fórmula de cinco puntos al caso en que se utilizan, además del punto central, otros dos en cada uno de los lados.

¿Cuál es el orden del método?

$\boxed{13}$ Hallar los coeficientes óptimos para el esquema de cinco puntos en el caso de un dominio curvo para los puntos del mallado próximos a la frontera en los que dos de sus vecinos caen fuera del dominio.

¿Cuál es el orden del método?

$\boxed{14}$ Sea Ω un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el método de Galerkin para resolver

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u = f & \text{en} & \Omega \\ u = 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{array} \right.$$

en los subespacios $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \cdots$.

Es decir, fijado $k \geq 1$ buscamos u_k como solución del problema en dimensión finita:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k \in E_k \\ \mathbb{D} \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla v dx = \mathbb{D} \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in E_k. \end{array} \right.$$

Obviamente u_k se puede escribir en la forma

$$u_k(x) = a_1 e_1(x) + \cdots + a_k e_k(x)$$

siendo $a_1, \cdots, a_k$ coeficientes reales y $\{e_1, \cdots, e_k\}$ una base de E_k.

Sypongamos que se obtiene una base de E_{k+1} añadiendo un solo elemento e_{k+1}.

¿Se puede garantizar que

$$u_{k+1}(x) = a_1 e_1(x) + \cdots + a_k e_k(x) + a_{k+1} e_{k+1}(x)?$$

Es decir, ¿se puede asegurar que los coeficientes $a_1, \cdots, a_k$ permanencen inalterados al calcular u_{k+1}?

¿Bajo que condición sobre las bases podemos asegurar que ésto se verifica?

¿Se puede garantizar que $\| u - u_k \|_{H_0^1(\Omega)}$ decrece cuando k aumenta? ¿Se puede asegurar que el decrecimiento es estricto?

$\boxed{15}$ Comprobar que utilizando elementos finitos P_2 en una dimensión espacial se llega al esquema

$$\begin{cases} \frac{1}{3h}\left(u_{j-1} - 8u_{j-1/2} + 14u_j - 8u_{j+1/2} + u_{j+1}\right) = \mathbb{D}\int_0^1 f\psi_j \\ \frac{8}{3h}\left(-u_j + 2u_{j+1/2} - u_{j+1}\right) = \mathbb{D}\int_0^1 f\psi_{j+1/2} \end{cases}$$

Probar que si u_h es la solución obtenida de este modo existe $C > 0$ tal que

$$\| u - u_h \|_{H_0^1(0,1)} \leq Ch^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|_{L^2(0,1)} \text{ si } u \in H^3(0,1).$$

Comprobar que no se verifica el principio del máximo.

$\boxed{16}$ Invertir la identidad

$$p(\theta, \psi) = \mathbb{D}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{D}\sum_{\ell=1}^{m} \varepsilon_{j,\ell} e^{i(j\theta + \ell\psi)}, \ -\pi \leq \theta, \psi \leq \pi$$

obteniendo $\{\varepsilon_{j,\ell}\}$ en función de $\{p(\theta, \psi)\}$.

$\boxed{17}$ Comprobar que

$$\left| \frac{e^{i\theta} + e^{i\psi}}{4 - e^{i\theta} - e^{i\psi}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

para todo $-\pi \leq \theta, \psi \leq \pi t.q.$ máx$(| \theta |, | \psi |) \geq \pi/2$.

$\boxed{\text{A18}}$ Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^n$. Comprueba que si $2m \leq n$ existen funciones de $H^m(B)$ que no son continuas en el origen.

A19 • Probar la desigualdad de Poincaré para un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ acotado en una dirección.

- Probar que la desigualdad de Poincaré no se cumple si Ω es un cono.

Indicación: Utilizar el cambio de escala

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x).$$

A20 Sea T_ε el triángulo de vértices $(0,1),(1,0),(\varepsilon,0)$. Consideremos la función $v(x,y) = y^2$ y sea $r_\varepsilon v$ su interpolación lineal.

Comprueba que no existe una constante $C > 0$ tal que

$$\| v - r_\varepsilon v \|_{H^1(T_\varepsilon)} \leq C \| v \|_{H^2(T_\varepsilon)}$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

¿Hemos de sacar alguna conclusión en lo que respecta a los triángulos en el MEF?

A21 Consideramos el sistema

$$\begin{cases} -u'' = f, & 0 < x < 1, \\ u' + u = 0, & x = 1 \\ u' - u = 0, & x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

A.- Prueba que las soluciones regulares de (3) satisfacen

$$\mathbb{D}\int_0^1 u'\varphi' dx + u(1)\varphi(1) + u(0)\varphi(0) = \mathbb{D}\int_0^1 f\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1[0,1]. \tag{4}$$

En lo sucesivo adoptamos (4) como definición de solución débil de (3). De manera más precisa, diremos que $u = u(x)$ es solución débil de (4) si:

$$\begin{cases} u \in H^1(0,1), \\ \mathbb{D}\int_0^1 u'\varphi' dx + u(1)\varphi(1) + u(0)\varphi(0) = \mathbb{D}\int_0^1 f\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(0,1). \end{cases} \tag{5}$$

B.- Construye un funcional cuadrático $J : H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ cuyos puntos críticos sean soluciones débiles de (5). Prueba que J es coercivo, continuo y convexo y deduce la existencia de una solución débil de (5).

Indicación: Probar y utilizar la desigualdad de tipo Poincaré:

$$\mathbb{D}\int_0^1 | u |^2 dx \leq C \left[\mathbb{D}\int_0^1 | u' |^2 dx + | u(0) |^2 + | u(1) |^2 \right], \quad \forall u \in H^1(0,1).$$

C.- Construye un método de elementos finitos P_1 para aproximar (3). Comprueba que para cada $h > 0$, el sistema finito-dimensional correspondiente admite una única solución.

D.- Escribe el sistema finito-dimensional asociado en la forma

$$A_h \overrightarrow{u}_h = \overrightarrow{f}_h. \tag{6}$$

Calcula explícitamente la matriz A_h.

¿Se puede deducir la inversibilidad de la matriz A_h del criterio de Gerschgorin?

¿Se verifica el principio del máximo en el sistema (6)?

E.- Demuestra que el método de elementos finitos constuido converge.

F.- ¿Cuál es el orden de convergencia del método cuando $h \to y f \in L^2(0,1)$?

G.- ¿Observas alguna analogía entre las ecuaciones de (6) correspondientes a los nodos extremos $j = 0$ y $N + 1$ y las condiciones de contorno de (3)?

$\boxed{\text{A22}}$ Consideramos la ecuación

$$\frac{d^4u}{dx^4} + u = f\,,\ -\infty < x < \infty \tag{1}$$

para una viga infinita.

A.- Escribir un método de cinco puntos en diferencias finitas que coincida con el que se obtendría al descomponer (1) como

$$\left\{ \begin{array}{lll} -u_{xx} = v & , & -\infty < x < \infty \\ -v_{xx} + u = f & , & -\infty < x < \infty \end{array} \right. \tag{2}$$

y aplicar en (2) el método clásico de tres puntos para la aproximación del operador d^2/dx^2.

B.- Prueba que el esquema obtenido es consistente con (1). ¿De qué orden es?

C.- Utilizando los mismos argumentos escribe un esquema en diferencias finitas para el sistema siguiente, correpondiente a una vifa ginita pasada en sus extremos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^4u}{dx4} = f & , \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 & \\ u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0. & \end{array} \right. \tag{3}$$

Demuestra la convergencia suponiendo que la solución u es regular.

Indicación: Si la matriz involucrada en el esquema en diferencias es el cuadrado de la que interviene en la aproximación de la ecuación de Laplace, su espectro es conocido.

D.- Consideramos ahora la ecuación de difusión

$$\begin{cases} u_t + \frac{\partial^4 u}{\partial x4} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Escribe el método explícito de Euler en diferencias finitas utilizando el esquema de los apartados anteriores en la dirección especial. Estudia la consistencia, estabilidad y convergencia en función del número de Courant μ que habrás de definir convenientemente.

¿Cuál es el orden del método?

E.- Consideramos ahora la siguiente ecuación que modeliza las vibraciones de la viga:

$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{\partial^4 u}{\partial x4} = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Escribe una semidiscretización y analiza su consistencia y estabilidad mediante el Análisis de Fourier. ¿Converge el método? ¿Con qué orden?

PROBLEMAS SOBRE LA ECUACIÓN DEL CALOR

$\boxed{1}$ Consideramos la ecuación del calor con condiciones de contorno de Neumann:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Obtén un desarrollo en serie de Fourier de la solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos(k\pi x).$$

b) ¿Cómo evoluciona la cantidad $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)dx$ en función del tiempo? ¿Tiene ésto algo que ver con los coeficientes de Fourier de la solución?

c) Construye una semi-discretización en espacio de este sistema usando diferencias finitas.

d) Comprueba el orden, la estabilidad y la convergencia de dicha aproximación.

e) Construye dos esquemas completamente discretos basados en la discretización explícita de Euler y en la regla del trapecio respectivamente para la parte temporal.

f) Estudia el orden estabilidad y convergencia de éstos.

g) Comprueba si estos esquemas (el semi-discreto y los completamente discretos) reproducen de algún modo la ley de conservación del apartado b) anterior.

$\boxed{2}$ Consideramos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

En este problema pretendemos desarrollar una aproximación por elementos finitos de la solución.

Para ello introducimos el espacio E_h de las funciones lineales a trozos en un mallado regular de paso h. Sean $\{\phi_h\}_{1\leq j\leq N}$ las funciones de base habituales de modo que

$$E_h = \text{span}[\phi_1 \cdots \phi_N].$$

Buscamos una solución aproximada de la forma

$$u_h(t) = \sum_{1}^{N} u_j(t)\phi_j(x).$$

a) Deduce una ecuación del tipo

$$MU_t + RU = 0$$

para el vector de componentes

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix}$$

por el procedimiento habitual de integrar contra las funciones de base.

b) ¿Cuáles son las matrices M y R?

c) Prueba que M es inversible y escribe el sistema aproximado en la forma

$$U_t + A_h U = 0.$$

d) Demuesta la consistencia y convergencia del método.

e) Construye, sobre la base de esta semi-discretización, dos discretizaciones completas y analiza su convergencia.

$\boxed{3}$ El objeto de ste problema es desarrollar y analizar un método en diferencias finitas para la resolución del siguiente problema:

$$-y'' + py' + q(x)y = f(x),\ 0 < x < 1; \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta. \tag{1}$$

Posteriormente lo aplicaremos a una ecuación del calor asociada.

El coeficiente p se supone constante y la función $q = q(x)$ es continua, acotada y positiva, i. e.

$$q(x) \geq q_0 > 0, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{2}$$

Los datos de contorno α, β se suponen dados.

a) Mediante un cambio de variables de la forma

$$y = z + h(x), \tag{3}$$

siendo h una función que se puede calcular explícitamente en función de α y β, prueba que (1) puede reducirse al caso $\alpha = \beta = 0$.

En lo sucesivo supondremos que $\alpha = \beta = 0$.

b) Utilizando diferencias centradas en la primera y segunda derivada deduce una aproximación de (1) de la forma

$$AU = F \tag{4}$$

donde U es el vector columna $(u_1, ..., u_N)$, con $u_0 = u_{N+1} = 0$ y A es la matriz

$$A = \frac{2}{h^2} \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & 0 & \ldots\ldots. & 0 \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & \ldots\ldots. & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots. & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ 0 & \ldots. & 0 & -b_N & a_N \end{pmatrix}_{N\times N}, \tag{5}$$

con

$$a_j = 1 + h^2 q(x_j)/2; \quad b_j = [1 + hp/2]/2, \quad c_j = [1 - hp/2]/2. \tag{6}$$

c) Indica el valor más razonable para el segundo miembro F del problema discreto cuando f es continua y cuando f está simplemente en $L^2(0,1)$.

d) Demuestra que, para h suficientemente pequeño, la matriz A es estrictamente diagonal dominante (i. e. $|a_1| > |c_1|; |a_j| > |b_j| + |c_j|, j = 2, ..., N-1; |a_N| > |b_N|$) y que por tanto es inversible.

e) Comprueba que $Y = (y(x_1), ..., y(x_N))^t$, siendo y una solución de clase C^4 de (1), satisface

$$AY = F + G \tag{7}$$

donde G es del orden de $O(h^2)$ en la norma del máximo.

f) Deduce que el error $e_j = u_j - y(x_j)$ satisface las relaciones

$$a_j e_j = b_j e_{j-1} + c_j e_{j+1} + O(h^4) \tag{8}$$

y que por tanto, para h suficientemente pequeño,

$$(1 + h^2 q_0/2)|e_j| \leq e + O(h^4) \tag{9}$$

donde

$$e = \max_{j=1,\ldots,N} |e_j|. \tag{10}$$

¿En qué rango de valores de h se verifica (9)?

g) Concluye que el método es convergente de orden 2.

En lo sucesivo consideramos la ecuación del calor

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + p y_x + q(x) y = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & t > 0 \\ y(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{11}$$

h) Utilizando el método desarrollado en los apartados anteriores construye un método semi-discreto y comprueba que, bajo las hipótesis de los apartados anteriores es consistente de orden dos y estable. Deduce su convergencia.

i) Comprueba que utilizando un cambio de variable de la forma $z = e^{kt} y$ con k adecuado se puede omitir la hipótesis (2) en lo que respecta esta ecuación del calor.

$\boxed{4}$ Consideramos la ecuación de convección-difusión

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - b u_x, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1}$$

donde $b > 0$ es una constante.

a) Comprueba que se verifica la ley de disipación de energía

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx\right] = -\int_0^1 |u_x(x,t)|^2 \, dx. \tag{2}$$

b) Analiza el orden de la semi-discretización:

$$\begin{cases} u_j' = [u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}]/h^2 - b\ [u_{j+1} - u_{j-1}]/2h, \quad j = 1, \ldots, N, \quad t > 0 \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \\ u_j(0) = \varphi_j = \varphi(x_j), \quad j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{3}$$

c) Comprueba la ley de disipación de la energía discreta

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{N} \mid u_j \mid^2\right] = -\left[h\sum_{j=0}^{N}\left|\frac{u_{j+1} - u_j}{h}\right|^2\right]. \tag{4}$$

d) Argumenta brevemente la convergencia del método y su orden.

Consideramos ahora el método completamente discreto

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\left[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right]}{h^2} - \frac{b\left[u_{j+1}^n - j_{j-1}^n\right]}{2h}, \\ \qquad j = 1, \ldots, N, \quad n \geq 0 \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \geq 0 \\ u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{5}$$

e) Analiza el orden del método.

f) Analiza la convergencia en función del parámetro de Courant $\mu = \Delta\ t/\ h^2$.

$\boxed{5}$ Probar que el método de Euler

$$u_\ell^{n+1} = u_\ell^n + \mu\left[u_{\ell-1}^n - 2u_\ell^n + u_{\ell+1}^n\right]$$

para la ecuación del calor $1 - d$

$$u_t = u_{xx}$$

no converge cuando la constante de Courant $\mu > 1/2$.

$\boxed{6}$ Comprobar que el método SD

$$v_\ell^1 = -\frac{1}{12}v_{\ell-2} + \frac{4}{3}v_{\ell-1} - \frac{5}{2}v_\ell + \frac{4}{3}v_{\ell+1} - \frac{1}{12}v_{\ell+2}$$

para la aproximación de la ecuación del calor $1 - d$

$$v_t = v_{xx}$$

es de orden cuatro.

$\boxed{7}$ Comprobar que el método SD

$$v_\ell^1 = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[a_{\ell-1/2}v_{\ell-1} - \left(a_{\ell-1/2}+a_{\ell+1/2}\right)v_\ell + a_{\ell+1/2}v_{\ell+1}\right]$$

para la aproximación de la ecuación de difusión con coeficientes variables

$$v_t = \left(a(x)v_x\right)_x$$

es de orden dos si a es suficientemente regular.

$\boxed{8}$ Consideramos un método discreto general

$$\mathbb{D}\sum_{k=-\gamma}^{\delta} b_k(\mu)u_{\ell+k}^{n+1} = \mathbb{D}\sum_{k=-\alpha}^{\beta} c_k(\mu)u_{\ell+k}^{n}$$

para la aproximación de

$$u_t - u_{xx} = 0$$

bajo la conclusión

$$\mathbb{D}\sum_{k=-\gamma}^{\delta} b_k(\mu) = 1.$$

Probar que el método es de orden p si y sólo si la función

$$\widetilde{a}(z,\mu) = \left[\mathbb{D}\sum_{k=-\alpha}^{\beta} c_k(\mu)z^k\right] \Big/ \left[\mathbb{D}\sum_{k=-\gamma}^{\delta} b_k(\mu)z^k\right]$$

verifica

$$\widetilde{a}(z,\mu) = e^{\mu(\ell n z)^2} + c(\mu)(z-1)^{p+2} + O\left(\mid z-1\mid^{p+3}\right).$$

$\boxed{9}$ Utilizando la caracterización del ejercicio anterior probar que los métodos de Euler y Crank-Nicolson son de orden 2.

$\boxed{10}$ Utilizando el análisis de Fourier probar que el esquema de dos pasos y segundo orden

$$u_\ell^{n+2} = u_\ell^{n+1} + \frac{3}{2}\mu\left(u_{\ell-1}^{n+1} - 2u_\ell^{n+1} + u_{\ell+1}^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(u_{\ell-1}^{n} - 2u_\ell^{n} + u_{\ell+1}^{n}\right)$$

denominado de Adams-Bashforth es estable si

$$\mu \le 2/5$$

en la aproximación de

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

PROBLEMAS DE ECUACIONES HIPERBÓLICAS

$\boxed{1}$ Consideramos la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

a) Introducir una aproximación de este sistema mediante elementos finitos lineales a trozos que se escriba en la forma

$$MU'' + RU = 0. \tag{2}$$

Se trataría de una Semi-Discretización (SD).

b) Analizar el orden de consistencia, estabilidad y convergencia del método.
Indicación: Para el análisis de la estabilidad comprueba y utiliza la ley de conservación de la energía del problema semi-discreto

$$E(t) = \langle MU', U' \rangle + \langle RU, U \rangle. \tag{3}$$

c) Consideramos ahora la discretización completa derivada de (2):

$$M \left[\frac{U^{n+1} + U^{n-1} - 2U^n}{(\Delta t)^2} \right] = RU^n. \tag{4}$$

Introduce el número de Courant μ y analiza la estabilidad y convergencia del método en función de μ.

d) ¿Cuál es el dominio de dependencia de las soluciones en el modelo (4) y/o la velocidad de propagación en función de μ para los que se verifica la condición CFL?

e) ¿El rango de valores de μ para los que se tiene convergencia del método y para los que se verifica la condición de CFL es el mismo? ¿Por qué?

e) Adapta estos resultados al caso de la ecuación de ondas disipativa en la que la primera ecuación de (1) se sustituye por

$$y_{tt} - y_{xx} + y_t = 0, \; 0 < x < 1, t > 0. \tag{5}$$

$\boxed{2}$ Consideramos la ecuación de ondas $2-d$ en el cuadrado $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

a) Introduce una Semi-discretización del sistema de la forma

$$U'' + AU = 0 \tag{2}$$

basada en la discretización de 5-puntos del laplaciano.

b) ¿Cuál es el orden del método?

c) Analiza la estabilidad del método.

Indicación: Comprueba en primer lugar, multiplicando la ecuación (1) por u_t e integrando en Ω, que la energía

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\mid u_t \mid^2 + \mid \nabla u \mid^2\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\mid u_t \mid^2 + \mid \partial_{x_1} u \mid^2 + \mid \partial_{x_2} u \mid^2\right] dx_1\, dx_2 \end{aligned} \tag{3}$$

se conserva.

Comprueba después que lo mismo es cierto en el sistema semi-discreto para la energía:

$$E_k(t) = \frac{h^2}{2}\sum_{j,k=0}^{N}\left[\mid u'_{j,k}\mid^2 + \left|\frac{u_{j+1,k}-u_{j,k}}{h}\right|^2 + \left|\frac{u_{j,k+1}-u_{j,k}}{h}\right|^2\right] \tag{4}$$

d) Seguidamente consideramos el esquema discreto

$$\frac{U^{n+1}+U^{n-1}-2U^n}{(\Delta t)^2} + AU^n = 0. \tag{5}$$

Introduce el número de Courant μ y analiza la convergencia y estabilidad del método en función de μ.

e) ¿Cuál es el dominio de dependencia en el esquema discreto (5)? Sabiendo que el dominio del que la solución u de (1) depende en el punto (x,t) es $B_x(t)\times\{0\}$ en $\Omega\times(0,\infty)$, ¿para qué valores de μ se verifica la condición de CFL?

$\boxed{3}$ Consideramos la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\quad t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

a) Verifica que la solución de (1) es

$$u = u_0(x-t). \tag{2}$$

Determina el dominio de dependencia de la solución u en el punto (x,t).

b) Consideramos ahora tres tipos de semi-discretizaciones

$$u_j' + \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = 0 \text{ (forward)} \tag{3}$$

$$u_j' + \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = 0 \text{ (backward)} \tag{4}$$

$$u_j' + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0 \text{ (centrada)} \tag{5}$$

Comprueba que en uno de estos esquemas no se verifica la condición de CFL de comparación de los dominios de dependencia y que, por tanto, no converge.

c) Estudia la consistencia y estabilidad de los dos otros métodos. Analiza su convergencia.

Indicación: En el análisis de la estabilidad se recomienda la utilización del método de Fourier o von Neumann.

d) Consideramos ahora la siguiente aproximación completamente discreta:

$$\frac{u^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0. \tag{6}$$

Verifica si se satisface la condición de CFL en función de los valores del parámetro de Courant $\mu = \Delta t/\Delta x$.

¿Para qué valores de μ converge el método (6)?

e) Consideramos ahora el método discreto

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{7}$$

- e_1) Comprueba que la condición de CFL se cumple si $\mu \leq 1$.
- e_2) Analiza el orden de consistencia del método.
- e_3) Comprueba que, cuando $\mu \leq 1$, el máximo error en el paso n, e^n, verifica la ley de recurrencia.

$$e^{n+1} \leq e^n + \Delta t O(\Delta t + \delta x). \tag{8}$$

- e_4) Deduce la convergencia del método cuando $\mu \leq 1$.
- e_5) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que el método (7) converja?

f) Consideramos ahora el método centrado

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{9}$$

- f_1) Analiza la consistencia y la condición de CFL.

f_2) Comprueba por el método de von Neumann que no hay ninguna elección de $\mu = \Delta t/\Delta x$ que garantice la estabilidad.

g) Consideramos por último la siguiente simple modificación del esquema (9):

$$\frac{1}{\Delta t}\left[u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right]\right] + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{10}$$

g_1) Comprueba que la condición de CFL se satisface cuando $\mu \le 1$.

g_2) Analiza la consistencia del método.

g_3) Comprueba la consistencia del método como en el apartado e) anterior.

$\boxed{4}$ Consideramos la ecuación completamente discreta

$$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} = u_{j+1}^n + u_{j-1}^n \tag{1}$$

que se obtiene como aproximación de la ecuación de ondas con $\Delta t = \Delta x$.

a) Comprueba que si los datos iniciales son $f(x)$ y $g(x)$ (para u y u_t en $t = 0$) respectivamente, iterando la fórmula (1) se llega a la expresión explícita

$$u_j^{n+1} \quad = \quad f_{j+n-1} + \Delta t \sum_{\nu=0}^{n} g_{j+n-2\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\left[f_{j+n-2\nu} - f_{j+n-2\nu-1}\right].$$

b) Comprueba, bajo condiciones adecuadas de regularidad sobre f y g, que si Δx, $\Delta t \to 0$ mientras que $t = (n+1)\Delta t$ y $x = j\Delta x$ se mantienen fijos, entonces la solución de (2) converge a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x,t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds, \tag{2}$$

que es la solución de la ecuación de ondas.

$\boxed{5}$ Consideramos la ecuación de ondas $1-d$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Recordemos que las soluciones de (1) admiten el siguiente desarrollo en series de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \operatorname{sen}(kt) + b_k \cos(kt)\right]\sin(kx) \tag{2}$$

donde los coeficientes de Fourier son tales que

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx); \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin(kx). \tag{3}$$

Consideramos ahora la aproximación semi-discreta

$$\begin{cases} u_j'' + [2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}]/h^2 = 0, & j = 1, \dots, N, \quad t > 0 \\ u_0 = u_{N+1} = 0, & t > 0 \\ u_j(0) = u_{j,0};\ u_j'(0) = u_{j,1}, & j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{4}$$

a) Comprueba que la solución de (4) admite el siguiente desarrollo en "serie" de Fourier

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k(h)}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k(h)}t\right) \right] \sin(khj). \tag{5}$$

¿Cuál es el valor de $\lambda_k(h)$?

b) Comenta las analogías y diferencias de las dos expresiones (2) y (5).

Fijamos ahora un dato inicial $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$.

c) Comprueba que

$$E(t) = E(0) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 b_k^2 + k^2 a_k^2 \right], \tag{6}$$

en la ecuación (1).

Indicación: Utiliza la ya conocida fórmula de conservación de la energía y escribe ésta en términos de los coeficientes de Fourier $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$.

d) *En lo sucesivo la sucesión $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ se fija de una vez por todas de modo que la serie (6) converja.*

Consideramos entonces la serie (2) y (5) con los mismos coeficientes.

Comprueba que, para cada $t > 0$ fijo, la expresión en (5) converge a la de (2) en el sentido que

$$h \sum_{j=1}^{N} \left| u_j'(t) - \widetilde{u}_j(t) \right|^2 + \left| \frac{(u_{j+1}(t) - \widetilde{u}_{j+1}(t)) - (u_j(t) - \widetilde{u}_j(t))}{h} \right|^2 \to 0$$

siendo $\widetilde{u}_j(t) = u(x_j, t)$.

$\boxed{6}$ Consideramos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{1}$$

a) Comprueba que (1) puede escribirse en la siguiente forma equivalente:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + u_x = v \\ v_t - v_x = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

b) Realizamos una discretización "forward" de cada una de las ecuaciones de (2)

$$\left\{\begin{array}{l} u'_j + \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = v_j \\ v'_j - \frac{v_{j+1} - v_j}{h} = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Comprueba que (3) conduce a la siguiente semi-discretización de (1):

$$U'' + A_h U + h A_k U' = 0 \tag{4}$$

donde A_h es la matriz tridiagonal de aproximación del operador de Laplace $-d_x^2$.

c) Estudia el orden de consistencia del método.

d) Lo aplicamos ahora en el problema de la cuerda vibrante

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} + u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < \pi, \end{array}\right. \tag{5}$$

obteniendo el esquema semi-discreto.

$$\left[\begin{array}{ll} u''_j + [2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}]/h^2 + h[2u'_j - u'_{j+1} - u'_{j-1}]/h^2 = 0, & j = 1, \ldots, N, \quad t > 0 \\ u_0 = u_{N+1} = 0, & t > 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Comprueba que, en este caso, la energía de las soluciones de (6) se disipa. ¿Cuál es la ley de disipación de energía?

e) Demuestra la convergencia del método.

f) Comprueba que, en realidad, toda la familia de métodos

$$U'' + A_h U + h^\alpha A_h U' = 0 \tag{7}$$

con $\alpha > 0$ es convergente.

g) Comprueba que, cuando $\alpha = 0$, el método (7) también converge. ¿Pero cuál es la ecuación en derivadas parciales límite en este caso?

$\boxed{7}$ •Probar que el método de "leapfrog"

$$u_\ell^{n+2} = \mu\left(u_{\ell-1}^{n+1} - u_{\ell+1}^{n+1}\right) + u_\ell^n \tag{8}$$

para la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0 \tag{9}$$

es de orden 2 para cualquier valor de la constante de Couvant $\mu = \Delta t/\Delta x$.

•Probar que en el caso particular $\mu = 1$ el método es de orden ∞ puesto que la solución de la ecuación (9) verifica entonces exactamente (8).

•Analizar la estabilidad del método.

$\boxed{8}$ •Prueba que el método de Crank-Nicolson para la ecuación del ejercicio anterior es de orden 2:

$$-\frac{1}{2}\mu u_{\ell-1}^{n+1} + u_\ell^{n+1} + \frac{1}{4}\mu u_{\ell+1}^{n+1} = \frac{1}{4}\mu u_{\ell-1}^{n} + u_\ell^{n} - \frac{1}{4}\mu u_{\ell+1}^{n}.$$

•Analiza la estabilidad del método.

•¿Para qué valores de μ se verifica la condición CFL sobre los dominios de dependencia? ¿Y en el caso del esquema de "leapfrog"?

$\boxed{9}$ •Analiza el orden y estabilidad de los siguientes esquemas para la ecuación de transporte del ejercicio 7:

- $u_\ell^{n+2} = (1-2\mu)\left(u_\ell^{n+1} - u_{\ell-1}^{n+1}\right) + u_{\ell-1}^n$
- El esquema de Lax-Wendroff:

$$u_\ell^{n+1} = \frac{1}{2}\mu(1+\mu)u_{\ell-1}^n + (1-\mu^2)u_\ell^n - \frac{1}{2}\mu(1-\mu)u_{\ell+1}^n.$$

- El esquema de Lax-Friedrichs:

$$u_\ell^{n+1} = \frac{1}{2}(1-\mu)u_{\ell-1}^n + \frac{1}{2}(1+\mu)u_{\ell+1}^n.$$

$\boxed{10}$ •Frecuentemente el esquema SD "upwind"

$$u_j^1 = -\left[\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}\right] \tag{10}$$

para la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0, \tag{11}$$

se dice que es un esquema difusivo o viscoso puesto que (10) puede también interpretarse como una aproximación centrado de la ecuación

$$u_t + u_x = \varepsilon u_{xx} \tag{12}$$

con $\varepsilon = \Delta x/2$.

¿Podrías justificar dicha afirmación?

$\boxed{11}$ •Estudia el orden y la estabilidad del método

$$(1-\mu)u_{\ell-1}^{u+1} + (1+\mu)u_{\ell}^{n+1} = (1+\mu)u_{\ell-1}^{n} + (1-\mu)u_{\ell}^{n} \tag{13}$$

para la ecuación de transporte $u_t + u_x = 0$.

$\boxed{12}$ •Determina el orden del esquema

$$u_{j,\ell}^{n+1} = \frac{1}{2}\mu(\mu-1)u_{j+1,\ell+1}^{n} + \left(1-\mu^2\right)u_{j,\ell}^{2} + \frac{1}{2}\mu(\mu+1)u_{j-1,\ell-1}^{n} \tag{14}$$

para la ecuación de transporte en dos dimensiones espaciales

$$u_t + u_x + u_y = 0 \tag{15}$$

suponiendo que $\Delta x = \Delta y$, $\Delta t = \mu\Delta x$ y siendo $u_{j,\ell}^{n}$ una aproximación de $u(j\Delta x,\, \ell\Delta y,\, n\Delta t)$.

$\boxed{13}$ •Demuestra que, mediante un simple cambio de variables la ecuación de transporte

$$u_t + \alpha u_x = 0 \tag{16}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ puede transformarse en

$$u_t + u_x = 0. \tag{17}$$

Observa que esto permite obtener esquemas convergentes para (16) a partir de los de (17) sin necesidad de volver a realizar todo el análisis de la convergencia. ¿Qué relación observas entre el dominio de dependencia de (16) con $\alpha < 0$ y el de (17)? ¿Y en relación a los esquemas "upwind"?

¿Se puede decir lo mismo para las ecuaciones en dos dimensiones espaciales

$$u_t + \alpha u_x + \beta uy = 0$$

en relación a

$$u_t + u_x + u_y = 0?$$

$\boxed{14}$ •Analiza el orden y la estabilidad del método

$$u_{\ell}^{n+2} - u_{\ell}^{n+1} + u_{\ell}^{\eta} = \frac{1}{12}\left[-u_{\ell-2}^{n+1} + 16u_{\ell-1}^{n+1} - 30u_{\ell}^{n+1} + 16u_{\ell+1}^{n+1} - u_{\ell+2}^{n+1}\right]$$

para la ecuación de ondas

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

$\boxed{15}$ Consideramos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Introducimos en primer lugar su semi-discretización espacial más simple y habitual:

$$u_j'' = \frac{1}{(\Delta x)^2}\Big[u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\Big]. \tag{19}$$

a) Comprueba que si en la semi-discretización (19) aplicamos el esquema centrado (en tiempo)

$$u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} = \Psi(u^{n+1}) \tag{20}$$

para la resolución de la ecuación diferencial $y''(t) = \Psi(y(t))$, obtenemos el siguiente esquema centrado para la aproximación de la ecuación de ondas (18):

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\Big[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\Big]. \tag{21}$$

b) Suponiendo que f y g son funciones continuas, indica una manera natural de aproximar los datos inciales de este esquema que, por ser de dos pasos temporales, necesita para su inicialización que determinemos u_j^0 y u_j^1 para todo j.

c) Comprueba que, cuando $\Delta t = \Delta x$ el esquema se reduce a

$$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} = u_{j+1}^n + u_{j-1}^n. \tag{22}$$

Concluye que este esquema verifica la condición necesaria de estabilidad CFL.

Indicación: Recuerda que la condición CFL exige que el dominio de dependencia del esquema discreto contenga al del continuo y que, por la fórmula de D'Alambert, la solución de (18) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x+t) + f(x-t)\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

d) Comprueba que el esquema (22) es consistente. ¿Cuál es su orden?
Indicación: Integra la ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ en el cuadrado de vértices en los nodos del mallado correspondientes a los índices $(j, n+1), (j, n-1), (j+1, n)$ y $(j-1, n)$, y verifica que toda solución de (18) es solución exacta de (22).

(e) Comprueba la condición de estabilidad de von Neumann y deduce la convergencia del método.