

Ficha de trabajo en clase 1
Introducción a MATLAB
04 de octubre de 2007

A) Escalares, vectores, matrices

En MATLAB, el símbolo "=" se llama operador de asignación. Asigna a una variable cuyo nombre está especificado en la parte izquierda del operador un valor numérico especificado en la parte derecha del operador.

Ejercicio 1: Definir dos variables a y b cuyos valores asignados sean 4 y 5. Calcular $a+b$, $a-b$, $b-a$, ab , a/b , a^b y b^a . Definir una variable x que tome el valor $2a + 5b$. Redefinir x como $3(x + 6(b - a))$.

En MATLAB, el número irracional π toma la forma de una variable predefinida denotada por `pi`. El formato numérico por defecto es `short` (punto fijo con 4 dígitos decimales). Otros formatos numéricos: `long` (punto fijo con 14 dígitos decimales), `short e`, `long e`, `short g`, `long g`, `rational` (se aproxima un número real por un cociente de dos enteros). Para cambiar el formato numérico, se usa el comando `format`, seguido por el nombre del formato numérico al que queremos pasar (por ejemplo, `format long e`).

Ejercicio 2: Calcular π en cada uno de los formatos numéricos antes mencionados. Definir dos variables c y d cuyos valores sean $\sin(\pi/6)$ y $\tan(\pi/6)$ y calcular $c + d$, $c^2 + d^2$, $1 - c^2$, \sqrt{c} , e , e^d , $|-c - 1|$, $\cos(\pi/2)/\sin(\pi)$ y $e/\sin(\pi)$.

Para crear una variable vectorial a partir de una lista de números o expresiones numéricas conocidas, se teclean sus componentes e_1, \dots, e_n separadas por coma (,) o por espacio dentro de un par de corchetes ([]):

$$\text{vect} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n].$$

Para introducir un vector de paso constante h a partir de los extremos a y b se escribe entre corchetes o sin corchetes $a : h : b$

$$\text{vect} = [a : h : b] \quad \text{o} \quad \text{vect} = a : h : b.$$

Por $a : b$ se denota el vector de paso constante $h = 1$.

Para definir una matriz, se teclean entre corchetes los vectores filas separados por punto y coma (los vectores fila se pueden dar en cualquiera de las formas antes mencionadas, es decir, por sus componentes o como vectores de paso constante):

$$\text{matriz} = [\text{fila}_1; \text{fila}_2; \dots; \text{fila}_m].$$

El símbolo ' se usa para denotar la traspuesta de una matriz. Cuando entre dos matrices $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ y $B = (b_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ hay una operación aritmética precedida por punto (.), el resultado es una matriz $C = (c_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, cuyas componentes c_{ij} se obtienen realizando dicha operación entre los correspondientes componentes a_{ij} y b_{ij} .

Para encontrar los autovalores y los autovectores de una matriz A se usa el comando `eig`:

$$[\text{eigenvectors}, \text{eigenvalues}] = \text{eig}(A),$$

donde `eigenvectors` es una matriz cuyas columnas son los autovectores de A y `eigenvalues` es una matriz diagonal, los componentes de la diagonal siendo los autovalores de la matriz A .

Ejercicio 3: Definir los vectores $vect_1 = (1, 7, 60/5 - 1, 7 * 3 - 5, 4^2 - 5)$, $vect_2 = [2 : 0, 2 : 3]$, $vect_3 = [2 : 10]$, $vect_4 = [40 : -2 : 30]$, $vect_5 = 55 : -3 : 36$, $vect_6 = 3 : 12$, $vect_7 = 1 : 11$.

Definir $vect_8 = vect'_6$. Calcular $vect_6 + vect_8$, observar y corregir.

Calcular $vect_7 + 3$, $vect_6 .* vect_7$, $vect_6 ./ vect_7$, $(vect_6 - vect_7).^3 + 9$, $vect_6.^2$, $vect_6 - 4$, $vect_6 * vect_6$ y corregir los eventuales errores que aparecen.

Definir la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Calcular A' , $A * A'$ y $A . * A'$. Definir el vector $b = (1, 3, 5)$.

Calcular $[b; A]$ (añade una fila dada por el vector b a la matriz A) y $[b' A]$ (añade una columna dada por b' a la matriz A).

Redefinir la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Definir B como la inversa de A (a través del comando

$inv(A)$) y calcular $A * B$, $A - B$, $A + B$, B' , B^3 , $B.^3$. Resolver el sistema $A * x = b'$. Encontrar los autovalores y los autovectores de la matriz A .

Consideremos m, n dos enteros positivos. A través del comando `eye(n)` se introduce la matriz identidad de tamaño n . Mediante los comandos `ones(m,n)`, `zeros(m,n)` se introducen matrices de m filas y n columnas con todos los elementos 1, respectivamente 0; cuando estos comandos sólo tienen un argumento (`ones(n)`, `zeros(n)`), se obtienen matrices cuadráticas de tamaño n con todos los elementos 1 o 0.

Si x es un vector, el comando `diag(x)` produce una matriz diagonal con el vector x en la diagonal principal. El comando `diag(x,k)`, donde k es un entero, produce una matriz cuadrada diagonal, con el vector x colocado en la k -ésima diagonal inferior si k es negativo, en la k -ésima diagonal superior si k es positivo y en la diagonal principal si $k = 0$. Si A es una matriz, el comando `diag(A)` produce un vector columna que almacena la diagonal principal de dicha matriz.

El comando `size(A)`, donde A es una matriz $m \times n$, tiene como salida el vector $[m, n]$. El comando `length(x)`, donde x es un vector de n componentes, tiene a n como salida.

Los comandos `triu(A)` y `tril(A)` generan una matriz triangular superior, respectivamente inferior, a partir de una matriz cuadrada A .

Ejercicio 4: Calcular `eye(5)`, `ones(2,3)`, `ones(5)`, `zeros(4,2)`, `zeros(4)`, `diag(vect_6)`, `diag(A)`, `diag(diag(A))`, `size(A)`, `length(vector_7)`, `size(vector_6)`, `triu(A)`, `tril(A)`, `size(vector'_6)`, `diag(vect_6, -3)`. Definir una matriz $M = \text{diag}(\text{ones}(5,1)) + \text{diag}(\text{ones}(3,1), -2) + \text{diag}(\text{ones}(4,1), 1)$. Usar el comando `spy(M)` para visualizar en una figura los elementos no-triviales de la matriz M .

Si x es un vector de n componentes, el comando `x(j)`, $j = \overline{1, n}$, tiene como salida la j -ésima componente del vector. Si A es una matriz $m \times n$, el comando `A(i,j)`, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, tiene como salida el elemento (i, j) de dicha matriz.

Denotemos por `index_1`, `index_2` dos vectores de enteros positivos en el rango $\overline{1, m}$, respectivamente $\overline{1, n}$. El comando `A(index_1, index_2)` tiene como salida la matriz resultada al intersectar las filas de índices contenidos en `index_1` con las columnas de índices contenidos en `index_2`. `A(:, index_2)` tiene como salida la matriz resultada al intersectar todas las filas con las columnas de índices contenidos en el vector `index_2`.

`A(end, index_2)` tiene como salida el vector resultado al intersectar la última fila con las columnas de índices contenidos en `index_2`.

Ejercicio 5: Definir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & 32 & 7 & 21 & 23 & 25 \\ 31 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ 8 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

y el vector $x = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$.

Calcular $x(4)$, $x(end)$, $x(2:5)$, $x(1:2:7)$, $x([2,4:end])$, $A(2,3)$, $A(3,1:4)$, $A(3,:)$, $A(:,4)$, $A(end,:)$, $A(end,3:5)$, $A(:,[1,3:6])$, $A(1:3,3:6)$, $A([4,2],[3,1,5])$.

B) Representaciones gráficas.

Para realizar gráficos 2-dimensionales se usa el comando `plot(x,y,option)`, donde x e y son vectores de la misma longitud y `option` es una opción que indica el color y el estilo de la línea.

Ejercicio 6: Teclear el siguiente conjunto de comandos:

```
clear
z=[-3*pi:0.1:3*pi]
plot(z,sin(z),'r*')
hold on (este comando mantiene los dos dibujos en la misma figura)
plot(z,cos(z),'bo').
```

Se pueden dar más detalles sobre una figura usando comandos del tipo `title('')` - añade título al gráfico, `legend` - añade una leyenda al gráfico, `grid` - añade una cuadrícula al gráfico, `grid off` - hace desaparecer la cuadrícula.

Para realizar películas, se usan los comandos `M=moviein(n)` - reserva memoria para almacenar n frames, `movie(M,i,j)` - hace que visualicemos la película almacenada en M i veces a la velocidad de j imágenes por segundo.

Ejercicio 7: Teclear el siguiente conjunto de comandos:

```
clear
z=[-2*pi:0.1:2*pi];
M=moviein(17);
for j=1:17
f=sin(z+j*pi/17);
plot(z,f,'b*')
M(:,j)=getframe;
end
movie(M,10,7).
```

Los siguientes dos programas tienen como objetivos la inicialización al uso del Editor de MATLAB, a la definición de funciones en MATLAB y a las representaciones gráficas 3-dimensionales.

Ejercicio 8: Primero, vamos a definir una función `test3d` en un fichero llamado `test3d.m`:

```
function Z=test3d(X,Y)
Z=3*(1-X).^2.*exp(-X.^2-(1+Y).^2)-10*(X/5-X.^3-Y.^5).*exp(-X.^2-Y.^2)
-1/3*exp(-(X+1).^2-Y.^2)
```

Observar que el nombre de la función debe coincidir con el nombre del fichero la guardamos.

Vamos a escribir un otro fichero tipo `.m` que realiza la visualización 3-d de la función `test3d` antes definida:

```
clear all
u=[0:pi/20:6*pi];
figure(1) (se abre una ventana gráfica dividida en cuatro sub-ventanas dispuestas en dos líneas y dos columnas)
subplot(2,2,1)
plot3(u,sin(u),cos(u),'b*') (el comando plot3 facilita la visualización de curvas parametrizadas en tres dimensiones)
x=[-3:0.1:3];
y=[-4:0.1:4];
[X,Y]=meshgrid(x,y); (el comando meshgrid, cuyos argumentos son dos vectores  $x$  e  $y$  de tamaño  $m$  y  $n$ , produce dos matrices  $n \times m$ ,  $X$ , cuyas  $n$  filas son copias de  $x$ , e  $Y$ , cuyas  $m$  columnas son copias de  $y$ .)
```

`Z=test3d(X,Y)`; (se aplica la función `test3d` a las matrices X e Y , obteniéndose una matriz $n \times m$, Z .)

`subplot(2,2,2)`

`meshc(x,y,Z)` (los comandos `mesh` o `meshc` hace que la superficie sea visualizada como una malla; el segundo comando tiene la ventaja de que se puede visualizar también la forma de las curvas de nivel. El comando `waterfall` hace visualizar la superficie como una malla unidireccional.)

`subplot(2,2,3)`

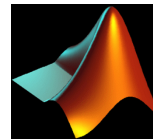
`surf(Z)` (los comandos `surf` o `surfz` hace que visualicemos el gráfico como una superficie continua; el segundo comando tiene la ventaja de que se puede visualizar también la forma de las curvas de nivel.)

`subplot(2,2,4)`

`contour3(x,y,Z,16)` (los comandos `contour` y `contour3` ayudan a visualizar las curvas de nivel de la superficie como proyección en el plano xOy , respectivamente en tres dimensiones.)

Referencias

- [1] Amos Gilat, Matlab, *Una introducción con ejemplos prácticos*, Editorial Reverté, Barcelona
- [2] Javier García de Jalón, José Ignacio Rodríguez, Jesús Vidal, *Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero*, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales,
<http://mat21.etsii.upm.es/ayudainf/aprendainf/Matlab70/matlab70primero.pdf>
- [3] David Griffiths, *An introduction to Matlab, Version 2.3*,
<http://www.maths.dundee.ac.uk/~ftp/na-reports/MatlabNotes.pdf>
- [4] Desmond J. Highham, Nicholas Highham, *Matlab guide*,
www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fquiros/Numerico2_03_04/mg_final.pdf
- [5] Maria Dolores Cárdenas, *Matlab como ayuda al estudiante en Ciencias Matemáticas*,
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fquiros
- [6] *Getting Started with Matlab 7*,
http://www.mathworks.com/acces/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf
- [7] Juan Antonio Infante, José Maria Rey, *Introducción a Matlab*,
<http://www.mat.ucm.es/~jair/matlab/notas.pdf>



Aproximaciones de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias
11 de octubre de 2007

Ficha de trabajo en clase 2:

Problema 1: Programar el método del punto fijo para aproximar la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sin(x(t)) & t \in (0, T) \\ x(0) = \pi/2. \end{cases} \quad (1)$$

donde $(0, T)$ es el intervalo donde la existencia local de la solución exacta está garantizada por el Teorema del punto fijo de Banach.

Calcular la solución exacta y dibujar las soluciones exacta y aproximada.

Realizar una tabla para comparar la solución exacta en los nodos y la solución aproximada.

Hallar y dibujar el error cometido.

Problema 2: Programar los métodos de Euler implícito y explícito para el problema (1).

Calcular la solución exacta y dibujar las soluciones exacta y aproximada.

Realizar una tabla para comparar la solución exacta en los nodos y la solución aproximada.

Hallar y dibujar el error cometido.

Problemas para efectuar en casa

Problema 1: Hacer un programa para representar graficamente en la misma figura, pero en sub-ventanas distintas las siguientes funciones:

- $f(x) = x^2 + 4 \sin(2x) - 1$, para $x \in [-3, 3]$
- $f(x, y) = 2^{-\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x) \cos(y/2)$, para $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$, usando el comando `surf`.
- $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$, para $x, y \in [-8, 8]$, usando el comando `meshc`.
- la curva parametrizada $(\sqrt{t} \sin(t), \sqrt{t} \cos(t), t/2)$, para $t \in [0, 6\pi]$, usando el comando `plot3`.

Problema 2: Programar el método del punto fijo para aproximar la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) & t \in (0, T) \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^3(t) & t \in (0, T) \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

donde $(0, T)$ es el intervalo donde la existencia local de la solución exacta está garantizada por el Teorema del punto fijo de Banach para el problema (2) y un subintervalo estrictamente incluido en el intervalo maximal de existencia para el problema (3).

Calcular la solución exacta y dibujar las soluciones exacta y aproximada.

Realizar una tabla para comparar la solución exacta en los nodos y la solución aproximada.

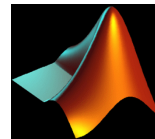
Hallar y dibujar el error cometido.

Problema 3: Programar los métodos de Euler implícito y explícito para los problemas (2) y (3).

Calcular la solución exacta y dibujar las soluciones exacta y aproximada.

Realizar una tabla para comparar la solución exacta en los nodos y la solución aproximada.

Hallar y dibujar el error cometido.



Método de diferencias finitas para problemas elípticos 1-d
30 de octubre de 2007

Ficha de trabajo en clase 3:

Problema 1: Se considera la ecuación de Poisson con condiciones de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(4\pi x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide:

1. Hallar la solución exacta.
2. Aproximar la solución usando el método de diferencias finitas.
3. Realizar una tabla comparando la solución exacta en los nodos y la solución aproximada, con $N = 10, 20, 40, 80$.
4. Para cada valor de N , hallar el error cometido en norma infinito.
5. Dibujar las soluciones exacta y aproximada para todos los valores de N mencionados.
6. Dibujar el error cometido en función de N .

Problema 2: Se considera la ecuación de Poisson con condiciones de contorno tipo Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

En las aplicaciones, c y f son funciones continuas, con $c \geq 0$. Se pide:

1. Aproximar la solución usando el método de diferencias finitas.
2. Aplicar el algoritmo anterior al caso particular:

$$a = 0, \quad b = 2, \quad u(0) = 10, \quad u(2) = \frac{10e^2}{21}, \quad c(x) = \frac{2}{(x+0,1)^2} \text{ y } f(x) = \frac{2e^x}{(x+0,1)^2} - \frac{e^x}{x+0,1}.$$

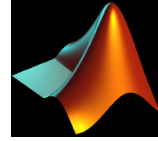
3. En este caso particular, la solución explícita es $u(x) = \frac{e^x}{x+0,1}$. Realizar una tabla comparando la solución explícita en los nodos y la solución aproximada, con $N = 10, 20, 40, 80$ puntos interiores.
4. Para cada valor de N , hallar el error cometido en norma infinito.
5. Dibujar las soluciones exacta y aproximada para los valores de N antes mencionados.
6. Dibujar el error cometido en función de N .

Problema 3: Se considera el problema espectral asociado al laplaciano 1-d con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas:

$$\begin{cases} -\varphi_{xx} = \lambda\varphi & x \in (0, 1) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Se pide:

1. Aproximar el problema espectral (3) mediante el método de diferencias finitas.
2. Dibujar los autovalores aproximados y los primeros N autovalores del problema continuo y observar la posición de las dos curvas de autovalores.
3. Dibujar los autovectores aproximados (en una película).



Método de diferencias finitas para problemas elípticos 1-d con condiciones de contorno mixtas
6 de noviembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 4:

Se considera el problema de contorno con condiciones de tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Supondremos que p , q y f son funciones continuas. Si $q \geq 0$, usando la alternativa de Fredholm y el principio de máximo, la solución del problema (1) es única.

Problema 1: Construir un esquema en diferencias finitas del mayor orden posible para el problema (1). Implementar en Matlab este esquema, considerando los siguientes casos particulares:

- a) $p = 0$, $q = 1$, $f(x) = 2 \cos(x)$, $u(0) = 2$, $u(1) = e + \cos(1)$
- b) $p(x) = \sin(x)$, $q = 1$, $f(x) = \cos^2(x)$, $u(0) = u(\pi/2) = 0$
- c) $p(x) = \sin(x)$, $q = 1$, $f(x) = \cos^2(x)$, $u(0) = 1$, $u(\pi/2) = 2$

Se considera el siguiente problema con condiciones de contorno mixtas:

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), & a < x < b, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \alpha, & \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Estudiemos el ejemplo $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, que corresponde a una condición de Dirichlet a la izquierda y condición de Neumann a la derecha.

A partir de este caso particular, construir un esquema en diferencias finitas para aproximar la solución del problema (2). Usar tanto diferencias centradas, como progresivas y regresivas para aproximar $u'(b)$ y concluir que tipo de aproximación tiene ventajas desde el punto de vista del orden de convergencia.

En el caso de las diferencias centradas o progresivas para la derivada en b , observar que se introduce un nodo ficticio y una incognita más. Para tener el mismo número de incognitas y ecuaciones, hay que introducir una ecuación más, que se obtiene pidiendo que la ecuación discretizada se verifique en el $N + 1$ -ésimo nodo (en el modelo continuo, esto se corresponde a observar que podemos construir un problema con condiciones de Dirichlet en el intervalo $(a, 2b - a)$ a partir de los datos f , p , q prolongados por paridad en el intervalo $(b, 2b - a)$, cuya solución, por ser única, coincide con la solución del problema puesto en (a, b)). Las mismas ideas se pueden emplear para tratar condiciones de contorno más generales (con α_i, β_i , $i = 1, 2$, números reales cualesquiera).

Problema 2: Se considera el caso particular:

$$a = -1/2, \quad b = 3/2, \quad u'(-1/2) = u'(3/2) = 0, \quad p = 0, \quad q = 1 \text{ y } f(x) = (\pi^2 + 1) \sin(\pi x) + 2.$$

Se pide:

1. Aproximar la solución usando el método de diferencias finitas. Para aproximar las condiciones de contorno utilizar
 - a) diferencias centradas, introduciendo los nodos ficticios x_{-1} y x_{N+2} fuera del intervalo.
 - b) diferencia progresiva en el extremo izquierdo y diferencia regresiva en el derecho (sin nodos ficticios)

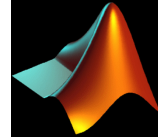
2. Realizar una tabla que contenga la solución exacta y las soluciones aproximadas por los métodos a) y b) para $N = 10, 20, 40, 80$ nodos interiores.
3. Dibujar las soluciones aproximadas correspondientes a los métodos a) y b) y la solución exacta dada por $u(x) = 2 + \sin(\pi x)$, para todos los valores anteriores de N .
4. Calcular los errores cometidos en los métodos a) y b) y dibujarlos en función de N .
5. Fijemos $N = 100$ nodos interiores. Realizar una tabla comparativa y dibujar las soluciones aproximadas cuando se toma q constante, de valores comprendidos entre 10^{-4} y 10^4 .

Problema 3: Aproximar mediante diferencias finitas la solución del problema (2) con $p = 0$, $q = 1$, $f(x) = 2 \cos(x)$ y con las condiciones de contorno

a) $u'(0) = 1, u'(1) = e - \sin(1)$

b) $2u'(0) - u(0) = 0, (e + \cos(1))u'(1) - (e - \sin(1))u(1) = 0.$

Comparar las aproximaciones obtenidas con la solución exacta, $u(x) = e^x + \cos(x)$.



Relación de dispersión. Velocidad de grupo y velocidad de fase
8 de noviembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 5:

Problema 1: Hallar las relaciones de dispersión para las ecuaciones de transporte, calor, ondas y Schrodinger continuas.

Problema 2: Hallar las relaciones de dispersión para las semi-discretizaciones espaciales de estas ecuaciones. Dibujarlas frente a las continuas en el intervalo espacial $[-\pi/h, \pi/h]$.

Problema 3: Hallar las relaciones de dispersión para las aproximaciones completamente discretas abajo enumeradas. Dibujar las relaciones de dispersión non-disipativas (con parte imaginaria cero) frente a las continuas, para $\lambda = 0,5$ y para $\lambda = 2$ y marcar las diferencias.

Problema 4: Hallar las velocidades de grupo y de fase para todas las ecuaciones continuas antes mencionadas y las correspondientes velocidades de fase y de grupo para los esquemas semi-discretos y completamente discretos (los no-disipativos). Dibujar las velocidades de fase y de grupo semi-discretas y completamente discretas frente a las continuas.

Aproximaciones completamente discretas

En lo que sigue, h es el paso espacial, k es el paso temporal, u_j^n es una aproximación de $u(jh, nk)$.

Esquemas numéricos para la ecuación del transporte (en todos estos esquemas, $\lambda = k/h$ es una constante)

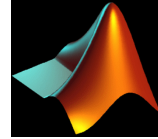
- **Euler explícito:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$
- **Euler implícito:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$
- **Leap frog:** $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$
- **Crank-Nicolson:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{4}\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{4}\lambda(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})$
- **Lax-Friedrich:** $u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$
- **Upwind:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j+1}^n - u_j^n)$
- **Lax-Wendroff:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$

Esquemas numéricos para la ecuación del calor (en todos estos esquemas, $\lambda = k/h^2$ es una constante)

- **Euler explícito:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$
- **Euler implícito:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$
- **Leap frog:** $u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$
- **Crank-Nicolson:** $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\lambda(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$

Esquemas numéricos para la ecuación de ondas (en todos estos esquemas, $\lambda = k/h$ es una constante)

- **Leap frog:** $u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \lambda^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$



Discretizaciones por diferencias finitas de los problemas de evolución 1-d
13 de noviembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 6:

Problema 1: Ecuación de transporte

Se considera la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t - u_x = 0 & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \psi(x) & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Vamos a estudiarla con dos datos iniciales,

$$\psi(x) = \sin(\pi x) \quad y \quad \psi(x) = \mathbb{I}_{[1/3, 2/3]} = \begin{cases} 1 & x \in [1/3, 2/3] \\ 0 & x \notin [1/3, 2/3] \end{cases}$$

Se pide:

1. Discretizar totalmente el problema usando un método explícito (por ejemplo: Euler explícito), un método implícito (por ejemplo: Euler implícito) para la derivada en tiempo y el método de diferencias finitas centradas y progresivas para la derivada en espacio. Estudiar la consistencia y estabilidad.
2. Realizar una película que represente las soluciones aproximadas obtenidas mediante los métodos numéricos empleados.

Problema 2: Ecuación de convección-difusión estacionaria

Se considera el problema:

$$\begin{cases} -\epsilon u_{xx} + u_x = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

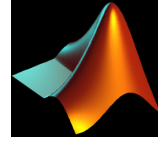
- Encuentra la solución exacta.
- Estudia la aproximación del problema mediante el método de diferencia finitas centradas, progresivas o regresivas, en el método numérico programado, y de la solución numérica obtenida.
- Dibujar las soluciones exacta y aproximada para cada uno de los métodos para $N = 20, 40, 80, 100$.
- Hacer el estudio anterior para diferentes valores de ϵ , (por ejemplo: $\epsilon = 0, 1, 0, 01, 0, 001$).

Problema 3: Ecuación de convección-difusión

Se considera el siguiente problema de convección-difusión:

$$\begin{cases} u_t = \epsilon u_{xx} + u_x & (0, 1) \times (0, T) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases} \quad (3)$$

- Utilizar esquemas implícitos y explícitos para la resolución en tiempo, diferencias finitas centradas y progresivas para la derivada espacial de orden uno.
- Dibujar la solución aproximada para cada uno de los métodos para $N=20,40,80,100$.
- Rehacer el estudio anterior para distintos valores de ϵ , (por ejemplo: $\epsilon = 0, 1, 0, 01, 0, 001$).



Diferencias finitas para problemas elípticos 2-d en un cuadrado
22 de noviembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 7: Consideramos el siguiente problema elíptico con condiciones de contorno de Dirichlet en un cuadrado:

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = f, & (x, y) \in (a, b) \times (c, d) \\ u(x, 0) = \psi_1(x), & x \in [a, b] \\ u(x, 1) = \psi_2(x), & x \in [a, b] \\ u(0, y) = \phi_1(y), & y \in [c, d] \\ u(1, y) = \phi_2(y), & y \in [c, d]. \end{cases} \quad (1)$$

Se pide:

- a) Tomando los datos $f, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ continuos, aproximar la solución del problema (1) mediante el método de diferencias finitas 2 - d.

Para esto, hay que dividir el intervalo (a, b) en $M + 1$ subintervalos de longitud $h = (b - a)/(M + 1)$ y el intervalo (c, d) en $N + 1$ subintervalos de longitud $\tilde{h} = (d - c)/(N + 1)$ y considerar $u_{j,k}$ como una aproximación de $u(jh, k\tilde{h})$, para $j = \overline{0, M+1}, k = \overline{0, N+1}$.

Teneis que reducir el problema continuo a un sistema de la forma $L\bar{u} = F$, donde L es la matriz del laplaciano discreto, \bar{u} es el vector de incógnitas de $M \times N$ componentes y F es una discretización de la función f a la cual hay que sumar las contribuciones de las condiciones de contorno.

- b) Tomar $a = c = 0, b = d = 1, h = \tilde{h} = 1/(N + 1)$, donde $N = 10, 20, 30, 40$ (el número de nodos interiores). En el caso particular $f = 0, \psi_1 = \phi_1 = 0, \phi_2(y) = \sin(\pi y/10)/\sin(\pi/10), \psi_2(x) = \sinh(\pi x/10)/\sinh(\pi/10)$ dibujar la solución aproximada y la solución exacta,

$$u(x, y) = \frac{\sinh(\pi x/10) \sin(\pi y/10)}{\sinh(\pi/10) \sin(\pi/10)}.$$

- c) Usando el comando `spy`, para cada valor de N , representar gráficamente la estructura de la matriz laplaciana L .
- d) Para cada valor de N , hallar el error cometido en norma l^∞ y dibujar el vector $\log(error)$ frente al vector $\log(N + 1)$. Son consistentes los resultados con lo que cabría esperar teóricamente?

Pasos que hay que seguir para resolver el item a):

- Ordenar el vector de incógnitas:

$$\bar{u} = (u_{1,1}, \dots, u_{M,1}, u_{1,2}, \dots, u_{M,2}, \dots, u_{1,N}, \dots, u_{M,N})'$$

- Construir el problema discreto

$$\begin{cases} -\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h^2} - \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\tilde{h}^2} = f_{j,k} = f(jh, k\tilde{h}), & j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N} \\ u_{0,k} = \phi_1(k\tilde{h}), & k = \overline{1, N} \\ u_{M+1,k} = \phi_2(k\tilde{h}), & k = \overline{1, N} \\ u_{j,0} = \psi_1(jh), & j = \overline{1, M} \\ u_{j,N+1} = \psi_2(jh), & j = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (2)$$

- Construir la matriz L . Para esto, consideramos las matrices auxiliares

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tilde{h}^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tilde{h}^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tilde{h}^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tilde{h}^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{\tilde{h}^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_M \text{ and } I_{\tilde{h}} = \frac{1}{\tilde{h}^2} I_M,$$

donde $I_M \in \mathcal{M}_M$ es la matriz identidad. Entonces

$$L = \begin{pmatrix} A & -I_{\tilde{h}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I_{\tilde{h}} & A & -I_{\tilde{h}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\tilde{h}} & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & -I_{\tilde{h}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I_{\tilde{h}} & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{MN}.$$

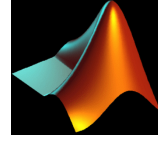
Es decir, la matriz L es una matriz tridiagonal por bloques, dividida en N^2 bloques $M \times M$.

- Construir el vector F , donde

$$F_{(k-1)M+j} = \begin{cases} F_{1,1} = f_{1,1} + \frac{\phi_1(\tilde{h})}{h^2} + \frac{\psi_1(h)}{h^2}, & \text{si } j, k = 1 \\ F_{j,1} = f_{j,1} + \frac{\psi_1(jh)}{\tilde{h}^2}, & \text{si } k = 1, j = \overline{2, M-1} \\ F_{M,1} = f_{M,1} + \frac{\phi_2(\tilde{h})}{h^2} + \frac{\psi_1(Mh)}{\tilde{h}^2}, & \text{si } j = M, k = 1 \\ F_{1,k} = f_{1,k} + \frac{\phi_1(k\tilde{h})}{h^2}, & \text{si } j = 1, k = \overline{2, N-1} \\ F_{M,k} = f_{M,k} + \frac{\phi_2(k\tilde{h})}{h^2}, & \text{si } j = M, k = \overline{2, N-1} \\ F_{1,N} = f_{1,N} + \frac{\phi_1(N\tilde{h})}{h^2} + \frac{\psi_2(h)}{\tilde{h}^2}, & \text{si } j = 1, k = N \\ F_{j,N} = f_{j,N} + \frac{\psi_2(jh)}{\tilde{h}^2}, & \text{si } j = \overline{2, M-1}, k = N \\ F_{M,N} = f_{M,N} + \frac{\phi_2(N\tilde{h})}{h^2} + \frac{\psi_2(Mh)}{\tilde{h}^2}, & \text{si } j = M, k = N \\ F_{j,k} = f_{j,k}, & \text{si } j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}, \text{ en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Por tanto, $F = (F_{1,1}, \dots, F_{M,1}, F_{1,2}, \dots, F_{M,2}, \dots, F_{1,N}, \dots, F_{M,N})'$.

- Hallar la solución: $\bar{u} = L^{-1}F$.
- Reorganizar el vector \bar{u} en una matriz $U = (U_{k,j}) = (u_{j+M(k-1)})$, con $k = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$. Hay que bordar esta matriz con los vectores correspondientes a las condiciones de contorno.
- Dibujar la solución: $\text{mesh}(x, y, U)$, donde $x = [a : h : b]$ e $y = [c : \tilde{h} : d]$.



Problemas espectrales
10 de diciembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 8:

Problema 1: Encontrar mediante ondas planas la forma de las soluciones del problema espectral continuo 1 - d:

$$\begin{cases} \phi \in H_0^1(0, 1), \lambda \in \mathbf{R}_+ \\ -\phi_{xx} = \lambda\phi, \quad x \in (0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

y del problema espectral aproximado por diferencias finitas 1 - d:

$$\begin{cases} (\phi_j^h)_{j \in \overline{0, N+1}}, \quad \lambda^h \in \mathbf{R}_+ \\ -\frac{\phi_{j+1}^h - 2\phi_j^h + \phi_{j-1}^h}{h^2} = \lambda^h \phi_j^h, \quad j = \overline{1, N} \\ \phi_0^h = \phi_{N+1}^h = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $h = 1/(N + 1)$.

Dibujar en la misma ventana las dos curvas de autovalores para los problemas (1) y (2) y hacer una película que recorra todos los autovectores. Encontrar las semejanzas y las diferencias entre las soluciones de los problemas espectrales (1) y (2).

Aproximar la solución del problema

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, \quad x \in (0, 1), \quad f \in L^2(0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

usando series de Fourier. Tomar $f(x) = e^x$, encontrar la solución exacta del problema (3) y compararla con la obtenida mediante series de Fourier.

Problema 2: Encontrar mediante ondas planas la forma de las soluciones del problema espectral 2 - d:

$$\begin{cases} \phi \in H_0^1((0, 1) \times (0, 1)), \lambda \in \mathbf{R}_+ \\ -(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = \lambda\phi, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \end{cases} \quad (4)$$

y del problema espectral aproximado por diferencias finitas 2 - d:

$$\begin{cases} (\phi_{j,k}^h)_{j,k \in \overline{0, N+1}}, \quad \lambda^h \in \mathbf{R}_+ \\ -\frac{\phi_{j+1,k}^h + \phi_{j-1,k}^h - 4\phi_{j,k}^h + \phi_{j,k+1}^h + \phi_{j,k-1}^h}{h^2} = \lambda^h \phi_{j,k}^h, \quad j, k = \overline{1, N} \\ \phi_{0,k}^h = \phi_{N+1,k}^h = \phi_{j,0}^h = \phi_{j,N+1}^h = 0, \quad j, k = \overline{0, N+1} \end{cases} \quad (5)$$

donde $h = 1/(N + 1)$.

Dibujar en la misma ventana las superficies que contienen los autovalores de los problemas (4) y (5) y hacer una película que recorra todos los autovectores. Discutir las semejanzas y las diferencias entre las soluciones de los problemas espectrales (4) y (5).

Problema 3: Se considera la ecuación del calor estacionaria en el espacio determinado por la corona esférica $1 < r < 2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) = 0, \quad 1 < r < 2 \\ T(1) = 2, \quad T(2) = 100. \end{cases} \quad (6)$$

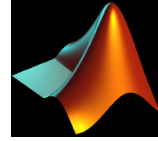
Aproximar la solución del problema (6) mediante diferencias finitas y dibujarla frente a la corona esférica.

Sucesiones de comandos para dibujar frente a la corona esférica:

```
a)r = [1 : h : 2];  
θ = [0 : hθ : 2 * π];  
for j = 1 : length(θ)  
plot3(r * cos((j)), r * sin((j)), T, 'opcion color')  
hold on  
end.
```

```
b)r = [1 : h : 2];  
θ = [0 : 2 * π * h : 2 * π];  
X = r' * cos(θ); - matriz (un vector columna por un vector fila de la misma dimensión)  
Y = r' * sin(θ);  
for j = 1 : length(r)  
Z(j, :) = T(j) * ones(1, length(r));  
end  
contourf(X, Y, Z)  
colorbar('horiz').
```

El comando `contourf(X, Y, Z)`: X, Y e Z son matrices de la misma dimensión. Se representa en los puntos (X_{ij}, Y_{ij}) la altura Z_{ij} en un cierto color conforme a una escala de colores, que se puede visualizar mediante el comando **colorbar**. El en el dibujo aparecen las curvas de nivel de la superficie dada por la matriz Z.



El método de elementos finitos 1 – d para problemas elípticos
13 de diciembre de 2007

Ficha de trabajo en clase 9:

Problema 1: Calcular las matrices de masa M_h y de rigidez R_h correspondientes al método de los elementos finitos 1 – d P_1 .

Problema 2: Sea $V_h = \{v \in H_0^1(0, 1) | v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1\}$. Encontrar mediante ondas planas las soluciones del problema espectral

$$\begin{cases} \lambda^h \in \mathbf{R}_+, \phi^h \in V_h \\ \int_a^b \phi_x^h v_x dx = \lambda^h \int_a^b \phi^h v dx, \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (1)$$

Dibujar en el mismo dibujo la curva de autovalores correspondiente al método de los elementos finitos y la curva de los primeros N autovalores continuos. Encontrar diferencias con respecto a las soluciones del problema espectral aproximado por diferencias finitas.

Problema 3: Se considera la ecuación de Poisson en un segmento con condiciones de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

En este ejercicio vamos a aproximar la solución usando el método de elementos finitos. Aplicaremos el programa al caso particular:

$$a = 0, \quad b = 2, \quad u(0) = 10, \quad u(2) = \frac{10e^2}{21}, \quad c(x) = 0 \text{ y } f(x) = \frac{2e^x(x-0,9)}{(x+0,1)^3} - \frac{e^x}{x+0,1}.$$

Antes de resolver numéricamente el problema (2), hay que reducirlo a uno equivalente en el que las condiciones de contorno sean homogéneas. Para ello se introduce una función $g(x)$ y con las siguientes propiedades:

$$g(a) = \alpha, \quad g(b) = \beta.$$

De esta forma, podemos escribir

$$u = v + g, \quad v \in H_0^1(a, b)$$

y el problema queda reducido a buscar $v \in H_0^1(a, b)$ tal que

$$\begin{cases} -v''(x) + c(x)v(x) = \hat{f}(x), & a < x < b, \\ v(a) = 0, & v(b) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

donde $\hat{f} = f - (-g'' + cg)$