PROBLEMAS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

Problema 1.

Consideramos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad x \in \mathbb{R}, \, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

con datos iniciales en $t = 0$:

$$u(x,0) = e^x, u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

1. Aplicando el Teorema de Cauchy-Kowalewski demostrar que existe un entorno de $\mathbb{R} \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^2$ en el que (1)-(2) admite una única solución analítica real.
2. Buscamos una expresión de la solución de la forma
$$u = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k.$$
Identificar los coeficientes (dependientes de x)$f_k(x)$ de esta serie.
3. Estudiar la convergencia de esta serie y comprobar que define una función analítica real en un entorno de $\mathbb{R} \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^2$.
4. Analizar estas mismas cuestiones en el caso multidimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta_x u + u \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = e^{x_1 + \ldots + x_n} \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3}$$

con $n \geq 2$.

Problema 2.

Consideramos la ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \, , x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Comprobar que
$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{2}{3}\left(t + \sqrt{3x + t^2}\right) & , \text{ si } 4x + t^2 > 0 \\ 0 & , \text{ si } 4x + t^2 < 0 \end{array} \right.$$
es una solución débil de esta ecuación si $t \geq 0$, es decir, que para toda función test $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ con soporte compacto en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ se cumple
$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left(u(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}u^2(x,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right) dx dt = 0.$$
2. Comprobar que se verifica la “condición de choque” según la cual
$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{(u^+ - u^-)}$$
siendo $\frac{d\xi}{dt}$ la velocidad de propagación de la discontinuidad.
3. ¿Es cierto para esta solución que toma valores constantes a lo largo de características?

Problema 3.

Consideramos la ecuación de las ondas elásticas en tres dimensiones espaciales:

$$Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta\right)u(x,t) = 0\ ,\ x \in I\!R^3, t \in I\!R \tag{4}$$

con c_1, c_2 dos constantes distintas.

Estudiamos las soluciones radiales $u = u(r,t)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

1. Comprobar que si u es radial la ecuación (4) se reduce a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2c_1^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_2^2\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2c_2^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u(r,t) = 0.$$

2. Probar que $v = ru$ satisface

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)v = 0.$$

3. Deducir que v es necesariamente de la forma:

$$v(r,t) = F_1(r + c_1t) + F_2(r - c_1t) + G_1(r + c_2t) + G_2(r - c_2t)$$

   y que por tanto

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\left\{F_1(r + c_1t) + F_2(r - c_1t) + G_1(r + c_2t) + G_2(r - c_2t)\right\}. \tag{5}$$

4. ¿Cuántos datos iniciales se necesitan para determinar de manera única una solución radial de (4)? Se entiende que los datos iniciales se toman en $t = 0$ y que por tanto son funciones del radio r.

5. Establecer una relación biunívoca entre los datos iniciales de u y los perfiles F_1, F_2, G_1 y G_2 de la forma general de la solución.

Problema 4.

Sea $u = u(x,y)$ una solución de la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Hacemos el cambio a las coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

Prescribimos datos de Cauchy en la circunferencia unidad:

$$u = f(\theta), \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \text{ si } r = 1, \tag{2}$$

siendo f y g funciones analíticas reales y de período 2π con respecto al ángulo θ.

(A) Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que el sistema (1)-(2) admite una y sólo una solución analítica real u en el conjunto

$$\{(\theta, r) : \theta \in [0, 2\pi], \mid r - 1 \mid < \varepsilon\}.$$

(B) Explica la importancia de que la circunferencia unidad sea compacta a la hora de responder a la primera cuestión (A).

(C) ¿Se puede asegurar que para $1-\varepsilon < r < 1$, la solución $u(r, \theta)$ obtenida es períodica de período 2π con respecto a θ? Razonar la respuesta.

(D) Consideramos ahora el caso particular en que f y g son polinomios trigonométricos

$$f(\theta) = \sum_{\substack{|n| \le k \\ n \in Z}} a_n \operatorname{sen} n\theta$$

$$g(\theta) = \sum_{\substack{|n| \le k \\ n \in Z}} b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Construir explícitamente una solución de (1) y (2) en este caso particular.

Indicación: Utilizar soluciones especiales de la forma $e^{\pm in\theta} r^n$ y $e^{\pm in\theta} r^{-n}$

(E) Probar que la solución obtenida en el apartado anterior define una función analítica en el plano $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen, i.e. en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(F) Supongamos ahora que

$$f(\theta) = \sum_{n \in Z} a_n \operatorname{sen} n\theta \, ; \, g(\theta) = \sum_{n \in Z} b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Es decir, consideramos datos de Cauchy que involucran infinitos modos de Fourier. Probar que bajo una condición de crecimiento del tipo

$$\mid a_n \mid + \mid b_n \mid \le C e^{-|n|^2}, \; \forall n \in Z$$

los datos f y g son funciones analíticas reales y que lo dicho en los apartados (E) y (F) permanece cierto.

Problema 5.

Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas tridimensional

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & \\ u_t(x, 0) = g(x) & \end{array} \right.$$

con datos iniciales $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, es decir, de clase C^∞ y de soporte compacto.

Recordemos que la solución de (1) viene dada por la fórmula:

$$(2) \qquad u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} g(x + t\omega) d\sigma(\omega).$$

(A) Utilizando esta fórmula probar que existe $C > 0$ (que depende de los datos iniciales) tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} | u(x,t) | \leq \frac{C}{1 + | t |}. \tag{3}$$

(B) ¿Está (3) en contradicción con la ley de conservación de energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(| \nabla_x u(x,t) |^2 + | u_t(x,t) |^2 \right) dx = E(0) \ , \forall t \in \mathbb{R}?$$

Razonar la respuesta teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \ , i = 1, 2, 3$$

son también soluciones de la ecuación de ondas tridimensional y que por lo tanto

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left(| \partial_t u(x,t) | + | \nabla_x u(x,t) | \right) = 0.$$

(C) Consideremos ahora el caso particular de datos $f = f(| x |), g = g(| x |)$ con simetría radial. Comprobar que en este caso la solución es de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2 | x |} \left(| x + t | f(| x + t |) + | x - t | f(| x - t |) + \int_{|x|-t}^{|x|+t} \sigma \widetilde{g}(\sigma) d\sigma \right) \tag{4}$$

siendo

$$\widetilde{g}(\sigma) = \begin{cases} g(\sigma), & \text{si } \sigma > 0 \\ g(-\sigma), & \text{si } \sigma < 0. \end{cases}$$

(D) Utilizando la fórmula (4) y eligiendo adecuadamente los datos radiales f y g, probar que el decaimiento observado en (3) es óptimo.

(E) ¿A partir de la fórmula (4) se puede deducir el decaimiento (3) en el caso de datos iniciales radiales, regulares y de soporte compacto?.

Problema 6.

Sea Ω un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$. Suponemos en particular que Ω verifica la condición de barrera necesaria para construir funciones de Green del Laplaciano.

Pretendemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = f(x) & \text{en} \quad \Omega \\ u(x) = a(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega \\ \Delta u(x) = b(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde Δ es laplaciano y Δ^2 el bilaplaciano: $\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)$.

Suponemos que f es la restricción a Ω de una función continua en todo $\mathbb{R}^n$ y que a y b son funciones continuas sobre $\partial\Omega$.

1. Probar que el sistema (1) admite a lo sumo una solución regular $u \in C^4(\overline{\Omega})$.

   Indicación: Suponiendo que hay dos u_1, u_2, definir $w = u_1 - u_2$, multiplicar por w la ecuación verificada por w e integrar por partes.

2. Utilizando la solución fundamental de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$ construir una función u tal que
$$\Delta^2 u = f \text{ en } \Omega.$$

3. Mediante la función construida en el apartado anterior, reducir la resolución de (1) al caso en que $f = 0$, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = a & \text{en } \partial\Omega \\ \Delta u = b & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

4. Comprobar que para resolver (2) basta con resolver el sistema en cascada siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = b & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = v & \text{en } \Omega \\ u = a & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4}$$

5. Resolver (3) mediante funciones de Green.

6. Suponiendo que v es la restricción a Ω de una función regular definida en todo $\mathbb{R}^n$ reducir la resolución de (4) a una ecuación del tipo (3) y concluir utilizando funciones de Green.

7. Utilizar el principio del máximo para probar que si
$$f = 0, a \geq 0, b \leq 0$$
entonces la solución de (1) es no-negativa.

Problema 7.

Estudiamos la ecuación del calor

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u + c\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{1}$$

siendo a una constante real y φ una función continua y acotada de $\mathbb{R}^n$.

1. Comprobar que u es solución de (1) si y sólo si
$$v(x_1, \cdots, x_n, t) = u(x_1 + ct, x_2, \cdots, x_n, t)$$
resuelve

(2) $$\left\{\begin{array}{ll} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = \varphi(x) & \end{array}\right.$$

2. Utilizando el apartado anterior construir la solución fundamental $K_c(x,t)$ de (1) tal que la única solución de (1) que satisface
$$| u(x,t) | \leq Ae^{C|x|^2}, \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$
sea de la forma
$$u = K_c * \varphi.$$
3. ¿Se puede aplicar a (1) el resultado de unicidad de soluciones positivas de Widder?
4. Utilizar un cambio de variables semejante al del apartado 2 para construir la solución de

(3) $$\left\{\begin{array}{ll} u_t - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x). & \end{array}\right.$$

5. Comprobar que la demostración del principio del máximo local para la ecuación del calor se puede reproducir sin dificultad en el sistema (3).

⌈**Indicación:** El principio del máximo local asegura que si $u \in C^2(\omega \times [0,T])$ y $u_t - \Delta u \leq 0$ entonces
$$\max_{\overline{\omega}\times[0,T]} u = \max_{\partial'} u$$
siendo
$$\partial' = (\overline{\omega} \times \{0\}) \cup (\partial\omega \times [0,T]) .\rfloor$$

Problema 8.

Consideramos la siguiente ecuación elíptica de orden cuatro en una dimensión espacial:

(1) $$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f & 0 < x < 1 \\ u = u_{xx} = 0 & x = 0, 1. \end{array}\right.$$

(A) Dar la formulación variacional de la solución débil $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ de (1) suponiendo que $f \in L^2(0,1)$.

(B) Demostrar que $H^2 \cap H_0^1(0,1) = \{\varphi \in H^2(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ es un subespacio cerrado de $H^2(0,1)$.

(C) Demostrar que en $H^2 \cap H_0^1(0,1)$ la seminorma $| \varphi | = \left(\int_0^1 | \varphi_{xx} |^2 \, dx \right)^{1/2}$ define una norma equivalente a la norma de $H^2(0,1)$.
⌈**Indicación:** Probar mediante el argumento habitual de contradicción y compacidad la existencia de $C > 0$ tal que:
$$\int_0^1 (u^2 + u_x^2) dx \leq C \int_0^1 | u_{xx} |^2 \, dx, \forall u \in H^2 \cap H_0^1(0,1).\rfloor$$

(D) Demostrar que el funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mid u_{xx} \mid^2 - \int_0^1 fudx$$

definido en $H^2 \cap H_0^1(0,1)$ es continuo, convexo y coercivo.

(E) Probar que existe $u \in H^2 \cap H_0^1$ tal que

$$J(u) = \min_{v \in H^2 \cap H_0^1(0,1)} J(v).$$

(F) Probar que el mínimo del apartado anterior es una solución débil de (1) que verifica la formulación débil del apartado **(A)**.

(G) Probar que la solución débil es única.

(H) Probar la desigualdad de interpolación:

$$\| \varphi_x \|_{L^2(0,1)} \leq \| \varphi_{xx} \|_{L^2(0,1)}^{1/2} \| \varphi \|_{L^2(0,1)}^{1/2}, \forall \varphi \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$$

⌈ **Indicación:** Observar que

$$\| \varphi_x \|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 \mid \varphi_x \mid^2 dx = \int_0^1 \varphi_x \varphi_x dx$$

e integrar por partes.⌋

(I) Deducir que como $f \in L^2(0,1)$ la solución débil obtenida es tal que $u \in H^4(0,1)$.

(J) ¿El método de construcción de la solución débil se puede aplicar si $f \in L^1(0,1)$?

Problema 9.
Consideramos la ecuación de evolución:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_{tt} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(A) Escribir este sistema en la forma abstracta

$$U_t + AU = 0 \ , \ U(0) = U^0$$

siendo $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$ y $U^0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.
Especificar los cuatro términos del operador matricial A.

(B) Introducimos el espacio de la energía

$$H = \left[H^2 \cap H_0^1(0,1)\right] \times L^2(0,1).$$

En vista de los resultados del Problema 1 deducir que H junto con la norma

$$\mid (\varphi, \psi) \mid_H = \left(\int_0^1 \left(\mid \varphi_{xx} \mid^2 + \psi^2\right) dx \right)^{1/2}$$

constituye un espacio de Hilbert.

Consideramos A, como operador no acotado en H con el dominio:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (\varphi, \psi) \in \left(H^2 \cap H_0^1(0,1)\right)^2 : \varphi \in H^4(0,1), \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(1) = 0 \right\}.$$

(C) Comprobar que

$$< AU, U >_H = 0, \forall U \in \mathcal{D}(A)$$

siendo $<,>_H$ el producto escalar asociado a la norma $\mid \cdot \mid_H$.

(D) Mediante los resultados del Problema 1 deducir que A es maximal en H y en vista del apartado anterior, maximal-monótono en H.

(E) Aplicando el Teorema de Hille-Yosida deducir un resultado de existencia y unicidad de soluciones de (2) con datos iniciales $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A)$.

(F) En vista del apartado **(D)** deducir que $\mid U(t) \mid_H$ es constante en el tiempo para toda solución.

(G) Multiplicando en (2) formalmente por u_t e integrando por partes demostrar que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\mid u_{xx}(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2\right] dx$$

es constante en el tiempo.

(H) ¿Qué relación existe entre la energía E y la cantidad $\mid U(t) \mid_H$?.

Problema 10.

Consideramos el problema de Cauchy para la siguiente ecuación de ondas no-lineal:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \mid u_t \mid^2 - \mid u_x \mid^2 = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Comprobar formalmente que u resuelve (1) si y sólo si $v = e^u$ satisface

$$(2) \qquad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v^0(x), v_t(x,0) = v^1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con

$$(3) \qquad v^0 = e^{u^0}, v^1 = e^{u^0} u^1.$$

(b) Escribir explícitamente la expresión de la solución v de (2).

(c) Deducir una expresión para la solución u de (1) deshaciendo el cambio de variables $v = e^u$.

(d) Comprobar que los datos iniciales u^0, u^1 de u están acotados en $\mathbb{R}$ si y sólo si existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\alpha \leq v^0(x) \leq \beta, \alpha \leq v^1(x) \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(e) Comprobar que la solución v satisface entonces

$$\alpha \leq v(x,t); \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y

$$v(x,t) \leq \beta + \beta \mid t \mid, \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(f) Deducir una cota superior para

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \mid u(x,t) \mid = f(t).$$

Problema 11.

Sea Ω un abierto acotado regular de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. Consideramos el problema de Neumann para la ecuación de Laplace:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$

(a) Comprobar que una condición necesaria para la existencia de una solución u de (1) es que

$$\text{(2)} \qquad \int_\Omega f(x)dx = 0.$$

$\lceil$**Indicación:** Integrar la ecuación en Ω.$\rfloor$

(b) Consideramos el siguiente subespacio vectorial de $H^1(\Omega)$:

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0 \right\}$$

Probar que V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

(c) Probar la siguiente desigualdad de Poincaré: $\exists C > 0$ tal que

$$\text{(3)} \qquad \int_\Omega u^2 dx \leq C \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx, \forall u \in V.$$

(d) ¿Es cierta la desigualdad (3) en $H^1(\Omega)$?

(e) Deducir que V dotado de la norma

$$\| u \|_V = \left(\int_\Omega | \nabla u |^2 \, dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

(f) Escribir la formulación variacional correspondiente a las soluciones débiles $u \in V$ de (1).

(g) Definir el problema de minimización asociado.

(h) Probar que este problema de minimización admite un único mínimo $u \in V$.

(i) Comprobar que este mínimo es la única solución débil de (1) en V.

(j) ¿Si prescindimos de la restricción $\int_\Omega u dx = 0$, la solución de (1) es única?.

Problema 12. Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ en } \mathbb{R} \end{cases}$$

con dato inicial

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

(a) Probar que

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[1 + \phi \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right]$$

con ϕ la función error

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2} dt$$

es la única solución de este sistema.

(b) Obtener esta expresión de u a partir de la fórmula general de la solución

$$u = G(t) * f$$

siendo G el núcleo del calor unidimensional.

(c) ¿Cuánto valen los límites

$$\lim_{x \to \infty} u(x,t) \; ; \; \lim_{x \to -\infty} u(x,t)$$

para cada $t > 0$ fijo?.

(d) Dibujar la gráfica del dato inicial y de la solución u en el instante $t = 1$.

(e) Describir la evolución del “frente”

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : u(x,t) = \frac{1}{2} \right\}$$

cuando $t \to \infty$.

(f) ¿Podrías describir en un par de frases el efecto que la evolución de la ecuación del calor produce sobre este dato inicial?

Problema 13.

Sea Ω un abierto acotado de clase C^2 de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$.
Consideramos la ecuación de ondas disipativa

$$(O) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1 & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

Introducimos el espacio de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

(a) Escribir el sistema (O) como una ecuación abstracta de la forma

$$\begin{cases} U_t + AU = 0, t \geq 0 \\ U(0) = U^0 \end{cases}$$

para una incógnita vectorial U.

(b) Comprobar que el operador A con dominio

$$D(A) = \left\{U = (u, v) \in H : v \in H_0^1(\Omega), u + v \in H^2(\Omega)\right\}$$

es maximal y monótono.

(c) Aplicando la teoría de semigrupos deducir la existencia de soluciones fuertes de (O). Explicitar la clase de funciones a la que dichas soluciones pertenecen en términos de la incógnita original u.

(d) Comprobar que la energía habitual $E(t)$ de la ecuación de ondas es tal que

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\int_\Omega \mid \nabla u_t \mid^2 dx.$$

Hacerlo tanto en el contexto de (O) como de la ecuación abstracta del apartado (a).

(e) Consideramos la energía modificada

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx.$$

Comprobar que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq C_2 E(t)$$

para todo $t \geq 0$ y toda solución.

(f) Comprobar que si probamos la existencia de $C_3 > 0$ tal que

$$(I) \qquad \frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) \leq -C_3 E(t)$$

entonces podemos concluir la existencia de C_4 y $C_5 > 0$ tales que

$$(D) \qquad E(t) \leq C_4 e^{-C_5 t} E(0)$$

para toda solución de (O).

(g) Comprobar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene (I).

(h) ¿Qué implica la desigualdad (D) sobre los autovalores del operador A?

Problema 14.

Sea Ω un abierto acotado y regular de $\mathbb{R}^2$. Consideramos la ecuación elíptica

$$(E) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Comprobar que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función regular las dos condiciones siguientes son equivalentes

$$\left[u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right] \Leftrightarrow [u = 0, \nabla u = 0 \text{ en } \partial\Omega]$$

(b) En vista del apartado anterior escribir la formulación variacional de la solución débil u de (E) en $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u = 0, \nabla u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$.

(c) Comprobar que $H_0^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^2(\Omega)$ y que por tanto constituye un espacio de Hilbert cuando lo dotamos de la norma inducida por $H^2(\Omega)$.

(d) Comprobar que en $H_0^2(\Omega)$ la norma de $H^2(\Omega)$ es equivalente a

$$\| u \|_{H_0^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega | \Delta u |^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

⌈**Indicación:** Una manera de proceder es probar que

$$\int_\Omega | \Delta u |^2 \, dx = \int_\Omega \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right] dx$$

y utilizar la desigualdad de Poincaré.⌋

(e) Formular el problema de minimización asociado a las soluciones débiles de (E).

(f) Probar que este problema de minimización admite un único mínimo $u \in H_0^2(\Omega)$.

(g) Probar que este mínimo es la única solución débil de (E).

Problema 15.

Consideramos la ecuación cuasilineal de orden uno:

$$u_t = t(u^2)_x, \quad \text{en } \mathbf{R} \times (0, \infty) \tag{1}$$

Pretendemos resolver (1) junto con la condición inicial.

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Suponemos que φ es una función regular.

a) Construir las curvas caracteristicas de modo que si éstas tienen como ecuación $(x(t), t)_{t>0}$ la solución u sea constante sobre ellas.

b) Dibujar los aspectos más importantes de las curvas caracteristicas en los casos en que $\varphi = \varphi(x)$ tiene el siguiente tipo de gráfica:

c) Indicar claramente en estos dibujos las zonas en las que u está bien definida como solución regular y aquellas en las que surgen los choques.

d) Dados dos puntos x_0, x_1 del eje de las ox, ¿cual es la relación que ha de existir entre $\varphi(x_0)$ y $\varphi(x_1)$ para que las caracteristicas que arrancan de $(x_0, 0)$ y $(x_1, 0)$ acaben cortandose y por lo tanto generen un choque?

e) En la situación del apartado anterior, ¿cuanto tiempo tarda en producirse el choque?

f) ¿Que le ocurre a u_x cuando se produce el choque?
[Indicación: Calcula $u_x(x(t), t)$ a lo largo de una caracteristica y después el limite cuando t tiende al instante en que se produce el choque].

g) ¿Cual es el tiempo maximal de existencia de la solución u en tanto que solución regular definida por el método de las caracteristicas?

h) Comprobar que el cambio de variables

$$v(x,t) = u(x, \sqrt{2t}) \tag{3}$$

reduce el sistema (1)-(2) a

$$v_t = (v^2)_x, \quad v(x,0) = \varphi(x). \tag{4}$$

i) Sabemos que las caracteristicas en (4) son lineas rectas. ¿ Podrias explicar porqué entonces para el sistema (1)-(2) se obtienen las curvas del apartado (a)?

j) El tiempo de formación de choques en (4) es conocido. ¿Podrias comprobar que coincide con el obtenido en el apartado (g) a través del cambio de variables (3)?.

Problema 16.

Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \ \text{ en } \mathbf{R} \times (0, \infty); \quad u(x,0) = x^n \tag{1}$$

siendo n un número natural.

a) ¿Se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalevski? En caso afirmativo indicar el resultado que se obtiene. En caso negativo, explicar cuales de las hipótesis de este Teorema no se cumplen.

b) Encontrar una solucion $u(x,t) = p(x,t)$, siendo p un polinomio homogéneo de grado n en las variables x y $t^{1/2}$.

c) Comparar los resultados de los dos apartados anteriores y justificar su compatibilidad. Comprobar en particular la analiticidad de la solución obtenida en el apartado b).

d) Indicar como se puede calcular la solución de (1) utilizando la transformada de Fourier y gracias a que

$$u = K * \varphi \tag{2}$$

siendo $K = K(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor.

[Nota: En la fórmula (2) mediante * se indica la convolución en la variable espacial x. Conviene recordar que $K(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} exp(-x^2/4t)$.]

e) ¿Cual es el comportamiento de la solución para $t > 0$ fijo cuando $|x|$ tiende a infinito?

f) ¿Y el comportamiento de la solución para x fijo cuando t tiende a infinito?

Problema 17.

Consideramos la función

$$u = u(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \tag{1}$$

de $I\!R_x \times I\!R_t$ en $I\!R$.

A. Comprueba que

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad x \in I\!R,\ t > 0. \text{ (Ecuación del calor)} \tag{2}$$

B. Comprueba que

$$\begin{aligned} &u(x,t) \to 0 \\ &u_x(x,t) \to 0 \text{ cuando } t \to 0^+ \\ &u_t(x,t) \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente en intervalos I cerrados y acotados de $I\!R_x$ tales que $0 \notin I$.

C. En función de los resultados de los apartados anteriores construye un ejemplo de problema de Cauchy para el operador del calor (2) para el que no se tenga unicidad.

D. Sobre el ejemplo del problema de Cauchy anterior comprueba que existe una infinidad de soluciones analíticas distintas.

E. Apoyándote en el Teorema de Cauchy-Kovalewski deduce que la recta $\{(x,0)\} \subset I\!R_x \times I\!R_t$ es característica con respecto al operador del calor (2).

F. Generaliza este ejemplo al caso en que $x \in I\!R^N$ con $N \geq 2$.

G. ¿Podrías construir un ejemplo semejante para la siguiente ecuación de Schrödinger

$$iu_t = u_{xx}?$$

Problema 18.

Supongamos que $P(D)$ es un operador diferencial lineal homogéneo de grado m con coeficientes constantes.

Supongamos que $H \subset \mathbb{R}^n$ es un semi-espacio con frontera característica.

A. Construye una solución $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $P(D)u = 0$ tal que el soporte de u esté contenido en H.

> **Indicación**: Escribe H como $x \cdot \xi \geq 0$ para un cierto vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ ($\cdot$ denota el producto escalar de $\mathbb{R}^n$) y considera soluciones de la forma $u = f(x \cdot \xi)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

B. ¿Puede hacerse una construcción semejante de modo que u sea analítica real en $\mathbb{R}^n$?.

C. ¿Podrías aplicar esta construcción en el caso del operador de ondas $u_{tt} - 2\Delta u = P(D)u$?

Problema 19.

Consideramos la ecuación de orden 1:

$$u_t + | u |^2 \, u_x = 0 \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{1}$$

A. Comprueba que si u es solución de (1), entonces $v = u^2$ es solución de la ecuación de Burgers:

$$v_t + v v_x = 0 \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{2}$$

B. Buscamos soluciones de (1) de la forma

$$u = \psi(x/t). \tag{3}$$

Comprueba que (1) equivale a

$$\psi'(s) \left(\psi^2(s) - s \right) = 0. \tag{4}$$

C. Describe el conjunto de soluciones C^1 a trozos de (4).

D. Describe las soluciones u que se obtienen a través de la fórmula (3).

E. Aplica la transformación $v = u^2$ y describe el conjunto de soluciones de la ecuación de Burgers que se obtiene. Relacionalo con las soluciones estudiadas en clase.

F. ¿Podrías describir la evolución en el tiempo de la solución de (1) que tiene como dato inicial

$$u^0 = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \quad \text{y } u^0 = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \quad \text{respectivamente ?}$$

Problema 20.
Consideramos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.1}$$

Suponemos que el dato inicial es un polinomio

$$u(x,0) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{0.2}$$

$\boxed{\text{A}}$ ¿Podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalewski para deducir que (1) con el dato inicial (2) admite una única solución analítica en un entorno de $\mathbb{R}_x \times \{0\}$? Razona la respuesta.

$\boxed{\text{B}}$ Buscamos una solución de (1) desarrollable en serie de potencias:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0, j\geq 0} a_{k,j} x^k t^j. \tag{0.3}$$

Identifica los coeficientes $a_{k,j}$ en función de los coeficientes a_k del polinomio (2).

$\boxed{\text{C}}$ ¿Se puede garantizar que para $t > 0$ fijo la serie de potencias converja?

$\boxed{\text{D}}$ Comprueba que para $t > 0$ fijo, $u(x,t)$ es un polinomio. ¿Cuál es su orden?

$\boxed{\text{E}}$ ¿Se puede decir lo mismo si invertimos el orden de las variables. Es decir, ¿para $x \in \mathbb{R}$ fijado, es $u(x,t)$ un polinomio en t? En caso afirmativo, ¿cuál es su orden?

$\boxed{\text{F}}$ ¿Se puede calcular de este modo la solución de (1) para $t < 0$?

$\boxed{\text{G}}$ Generaliza los resultados de los apartados anteriores al caso bidimensional

$$\begin{cases} u_t = \nu \left(u_{xx} + u_{yy}\right), (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,y,0) = u^0(x,y) \end{cases}$$

con

$$u^0(x,y) = \sum_{\substack{1\leq k\leq N \\ 1\leq j\leq N}} a_{k,j} x^k y^j.$$

Problema 21.
Consideramos la ecuación

$$u_t + \varepsilon u u_x + u_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{0.1}$$

$\boxed{\text{A}}$ Comprueba que

$$v(x,t) = u(x+t,t) \tag{0.2}$$

es solución de

$$v_t + \varepsilon v v_x = 0 \tag{0.3}$$

con el mismo dato inicial que u, i.e.

$$v(x,0) = u(x,0). \tag{0.4}$$

$\boxed{\text{B}}$ Comprueba que

$$w(x,t) = \varepsilon v(x,t) \tag{0.5}$$

es solución de

$$w_t + w w_x = 0. \tag{0.6}$$

$\boxed{\text{C}}$ Deduce que la solución u_ε de

$$\begin{cases} u_t + \varepsilon u u_x + u_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{u^0(x)}{\varepsilon} \end{cases} \tag{0.7}$$

es de la forma

$$u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\varepsilon} z(x-t,t) \tag{0.8}$$

siendo z solución de

$$\begin{cases} z_t + z z_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ z(x,0) = u^0(x). \end{cases} \tag{0.9}$$

$\boxed{\text{D}}$ ¿Cuál es el límite de

$$u_\varepsilon \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0$$

si el dato inicial u^0 es no-negativo?

A partir de este momento suponemos que el dato inicial de u está fijado, contrariamente a lo que ocurría en los apartados $\boxed{\text{C}}$ y $\boxed{\text{D}}$ anteriores.
Suponemos que u^0 es una función regular, no-negativa y de soporte compacto.

$\boxed{\text{E}}$ Calcula las rectas características asociadas al problema

$$\begin{cases} v_t + \varepsilon v v_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = u^0(x) \end{cases} \tag{0.10}$$

y dibujalas.

$\boxed{\text{F}}$ Da una estimación del tiempo de explosión (primer instante en el que dos caracteríticas se cruzan). Llamemosle t_ε. ¿Qué ocurre con t_ε cuando $\varepsilon \to 0$?

$\boxed{\text{G}}$ Describe el comportamiento de la solución v_ε de (10) cuando $\varepsilon \to 0$.

$\boxed{\text{H}}$ Responde a las cuestiones de los apartados $\boxed{\text{F}}$ y $\boxed{\text{G}}$ anteriores cuando

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \tag{0.11}$$

y

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \tag{0.12}$$

$\boxed{\text{I}}$ En vista de los resultados del apartado $\boxed{\text{H}}$ anterior y deshaciendo el cambio de variables (2) deduce el comportamiento límite de las soluciones de

$$\begin{cases} u_t + \varepsilon u u_x + u_x = 0, \ 0 < t, \ x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases} \tag{0.13}$$

tanto en el caso (11) como (12).

$\boxed{\text{J}}$ ¿Es cierto, tal y como cabría esperar, que el límite de las soluciones u_ε de (13) es la solución u de

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0,\ x \in I\!R,\ t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x),\ x \in I\!R.? \end{cases} \tag{0.14}$$

$\boxed{\text{K}}$ Calcula explicitamente la solución u de (14).

Problema 22.

Pretendemos resolver la ecuación

$$\begin{cases} \partial_x^4 u = f,\ 0 < x < 1 \\ u(0) = \partial_x u(0) = u(1) = \partial_x u(1) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Para ello introducimos el siguiente subespacio del espacio de Hilbert $H^2(0,1)$:

$$H = \left\{\varphi \in H^2(0,1) : \varphi(0) = \partial_x\varphi(0) = \varphi(1) = \partial_x\varphi(1) = 0\right\}.$$

$\boxed{\text{A}}$ Probar que H es un subespacio cerrado de $H^2(0,1)$. Deducir que H dotado de la norma de $H^2(0,1)$,

$$\| u \|_{H^2(0,1)} = \left[\int_0^1 \left(u^2 + |\partial_x u|^2 + \left|\partial_x^2 u\right|^2\right) dx\right]^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

$\boxed{\text{B}}$ Utilizando la desigualdad de Poincaré demuestra que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^1 \left(u^2 + |\partial_x u|^2\right) dx \le C \int_0^1 \left|\partial_x^2 u\right|^2 dx,\ \forall u \in H. \tag{0.2}$$

Deduce que en H la norma de $H^2(0,1)$ y la norma

$$| u |_H = \left(\int_0^1 \left|\partial_x^2 u\right|^2\right)^{1/2}$$

son equivalentes.

$\boxed{\text{D}}$ Da una demostración alternativa de (2) basada en un argumento de reducción al absurdo y utilizando la compacidad de la inclusión $H^2(0,1) \hookrightarrow H^1(0,1)$.

$\boxed{\text{D}}$ Escribe la formulación variacional asociada a las soluciones débiles $u \in H$ de (1). Comprueba que cuando $f \in L^2(0,1)$ todos los términos de dicha expresión tienen sentido.

$\boxed{\text{E}}$ Construye el funcional $J : H \to I\!R$ cuyos mínimos proporcionan soluciones débiles de (1).

$\boxed{\text{F}}$ Demuestra rigurosamente que si $u \in H$ es un mínimo de J, entonces es necesariamente una solución débil de (1).

$\boxed{\text{G}}$ Comprueba que $J : H \to I\!R$ es continua, convexa y coerciva.

$\boxed{\text{H}}$ Deduce la existencia del mínimo y por tanto de una solución débil.

$\boxed{\text{I}}$ Prueba la unicidad del mínimo comprobando primero que J es estrictamente convexa.

$\boxed{\text{J}}$ Prueba la unicidad de la solución trabajando en la formulación débil.

$\boxed{\text{K}}$ Prueba que como $f \in L^2(0,1)$, en realidad

$$u \in H^4(0,1) = \left\{ \varphi \in H^2(0,1) : \partial_x^3 \varphi \in L^2(0,1), \partial_x^4 \varphi \in L^2(0,1) \right\}.$$

Problema 23.

Consideramos ahora la ecuación

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_x^4 u - \partial_x^2 u = f, \, 0 < x < 1 \\ u(0) = \partial u(0) = u(1) = \partial u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

siendo $\varepsilon > 0$ un parámetro destinado a tender a cero y $f \in L^2(0,1)$.

$\boxed{\text{A}}$ Reproduce el programa del problema anterior y prueba la existencia de una única solución débil $u_\varepsilon \in H$ de (1) para cada $\varepsilon > 0$.

$\boxed{\text{B}}$ Subraya aquellos aspectos en los que el sistems (1) y el analizado en el problema anterior presentan diferencias más significativas y comentalos.

$\boxed{\text{C}}$ Utilizando u_ε como función test en la formulación débil de (1) deduce que

$$\begin{array}{lll} \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon & \text{está acotada en} & H \\ u_\varepsilon & \text{está acotada en} & H_0^1(0,1). \end{array}$$

$\boxed{\text{D}}$ Comprueba que, extrayendo subsucesiones se puede garantizar que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(0,1) \tag{0.2}$$

siendo $u \in H_0^1(0,1)$ una solución débil de

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, \, 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

$\boxed{\text{E}}$ ¿Se puede garantizar que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } H?$$

$\boxed{\text{F}}$ ¿Se puede garantizar que

$$\partial u(0) = \partial u(1) = 0?$$

$\boxed{\text{G}}$ Prueba que la unicidad de la solución débil $u \in H_0^1(0,1)$ de (3) permite probar que toda la familia u_ε converge a u en el sentido de (2) sin necesidad de extraer subsucesiones.

$\boxed{\text{H}}$ Enuncia el resultado de convergencia de las soluciones débiles del apartado $\boxed{\text{D}}$ en términos de la minimización de funcionales $J_\varepsilon : H \to \mathbb{R}$.

Problema 24.

Pretendemos resolver la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,\ x \in I\!\!R^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x),\ x \in I\!\!R^n \end{cases} \tag{0.1}$$

mediante la transformada de Fourier ($c > 0$).

$\boxed{\text{A}}$ Comprueba previamente que la superficie $S = \{(x,0) : x \in I\!\!R^n\}$ en la que están dados los datos de Cauchy no es característica.

$\boxed{\text{B}}$ Deduce que si f y g fuesen analíticos habría una única solución analítica.

$\boxed{\text{C}}$ Comprueba que si $u(x,t)$ es solución de (1), su transformada de Fourier en la variable x, i.e.

$$\widehat{u}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{I\!\!R^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x) dx \tag{0.2}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + c^2 \mid \xi \mid^2 \widehat{u} = 0,\ \xi \in I\!\!R^n,\ t > 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi),\ \widehat{u}_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi). \end{cases} \tag{0.3}$$

$\boxed{\text{D}}$ Deduce que la solución $\widehat{u}$ viene dada por la expresión

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(c \mid \xi \mid t) + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(c \mid \xi \mid t)}{c \mid \xi \mid}. \tag{0.4}$$

$\boxed{\text{E}}$ Comprueba que el último término de la expresión (4) no es singular cuando $\mid \xi \mid \rightarrow 0$.

$\boxed{\text{F}}$ Prueba que

$$\frac{d}{dt}\left[|\widehat{u}_t(\xi, t)|^2 + c^2 \mid \xi \mid^2 |\widehat{u}(\xi, t)|^2 \right] = 0,\ \forall \xi \in I\!\!R^n,\ \forall t > 0$$

y deduce que

$$|\widehat{u}_t(\xi, t)|^2 + c^2 \mid \xi \mid^2 |\widehat{u}(\xi, t)|^2 = |\widehat{g}(\xi)|^2 + c^2 \mid \xi \mid^2 \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2. \tag{0.5}$$

$\boxed{\text{G}}$ Integrando con respecto a ξ en (5) en $I\!\!R^n$ y utilizando la identidad de Parseval ($\| u \|_{L^2} = \| \widehat{u} \|_{L^2}$) deduce que la siguiente energía E de las soluciones de (1) se conserva en el tiempo:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{I\!\!R^n} \left[|u_t(x,t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x,t)|^2 \right] dx. \tag{0.6}$$

$\boxed{\text{H}}$ Realiza el mismo cálculo para la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u + a u_t = 0,\ x \in I\!\!R^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in I\!\!R^n. \end{cases} \tag{0.7}$$

$\boxed{\text{I}}$ Comprueba que en este caso

$$\frac{dE}{dt}(t) = -a \int_{\Omega} |u_t(x,t)|^2 dx. \tag{0.8}$$

$\boxed{\text{J}}$ Comprueba que en ambos sistemas la ley de energía (conservación o (8)) se puede obtener multiplicando la ecuación por u_t e integrando por partes.

Problema 25.

Consideramos la ecuación de orden uno:

$$\begin{cases} u_t + (e^u)_x = 0, & x \in I\!\!R,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in I\!\!R. \end{cases} \tag{0.1}$$

(a) Escribe la ecuación que las curvas características $t \to x(t)$ han de verificar.

(b) Comprueba que si u es solución de (0.1) y $t \to x(t)$ es una curva característica entonces $u(t, x(t))$ es independiente de t.

(c) ¿Se puede garantizar que $t \longmapsto u(t, x(t))$ es constante más allá del tiempo t^* en el que u presenta su primera discontinuidad?

(d) Dibuja los aspectos más relevantes del comportamiento de las curvas características en los tres siguientes casos:

- u_0 es decreciente;
- u_0 es creciente;
- u_0 es una función regular de soporte compacto.

(e) ¿Se puede garantizar en alguno de estos tres casos que $t^* = \infty$, i. e. que la solución obtenida mediante el método de las características no presenta ninguna discontinuidad?

(f) Obtén una expresión del tiempo máximo de existencia t^* antes de la formación de discontinuidades y comprueba que $t^* = \infty$ en el caso del apartado (e).

(g) Calcula explícitamente la solución en el caso en que

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ x+1 & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

(h) Comprueba que u es solución de (1) si y sólo si $v = e^u$ satisface

$$\begin{cases} v_t + v v_x = 0 \\ v(0) = v_0 = e^{u0} \end{cases}$$

(i) Utilizando este cambio de variables y los resultados conocidos sobre el problema de Riemann para la ecuación de Burgers calcula explícitamente la solución física de (0.1) en los dos siguientes casos

- $u^0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$
- $u^0(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x > 0. \end{cases}$

Problema 26.

Consideramos la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{0.1}$$

(a) Demuestra que si f es de clase $C^1, u(x,t) = f(x-t)$ es solución de (0.1).

Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.2}$$

(b) Deduce que si φ analítica (0.2) admite una única solución analítica en un entorno de $t = 0$.

(c) En vista del apartado (a) calcula explícitamente la solución.

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,ax) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.3}$$

siendo a una constante no nula.

(d) ¿Para que valores de a la recta $t = ax$ es característica?

Calcula explícitamente la solución de (0.3) siempre que $a \neq 0$ sea tal que la recta $t = ax$ no sea característica.

(f) Responde a las cuestiones (c)-(d) en el sistema

$$\begin{cases} u_t + a(x)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.4}$$

siendo $a = a(x)$ una función analítica tal que existen constantes positivas $\beta > \alpha > 0$ tales que

$$\alpha \leq a(x) \leq \beta,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema 27.

Pretendemos resolver la ecuación

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

siendo Ω un abierto acotado regular de $\mathbb{R}^n$.

(a) Probar que (0.1) es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) \begin{cases} -\Delta u = v & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \\ (3) \begin{cases} -\Delta v = f & \text{en} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \end{array} \right. \tag{0.4}$$

(b) Prueba que para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $v \in H_0^1(\Omega)$ de (0.3).

(c) Comprueba que (0.2) admite una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

(d) Utilizando los resultados clásicos de regularidad elíptica que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

A partir de ahora vamos a probar la existencia de la solución u de (0.1) en el espacio de Hilbert $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

(f) Utilizando los resultados clásicos de regularidad elíptica demuestra que en H la norma inducida por $H^2(\Omega)$ y $\left(\int_\Omega \mid \Delta u \mid^2 dx\right)^{1/2}$ son normas equivalentes.

(g) Construye un funcional $J : H \to I\!R$ cuyos puntos críticos sean solución débil de (1).

(h) Prueba que $J : H \to I\!R$ es continuo, coercivo y estrictamente convexo.

(i) Prueba la existencia de un único mínimo de J.

(j) Prueba trabajando directamente en la formulación variacional que la solución débil de (0.1) es única.

Problema 28.

Pretendemos resolver la ecuación dinámica de placas flexibles

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0 & \text{en} \quad I\!R^2 \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad I\!R^2 \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad I\!R^2. \end{cases} \tag{0.1}$$

(a) Utilizando las fórmulas básicas de la transformada de Fourier escribe la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que $\widehat{u}(\xi, t)$ ha de verificar.

(b) Calcula explícitamente $\widehat{u}(\xi, t)$ en función de $\widehat{u}_0(\xi)$ y $\widehat{u}_1(\xi)$.

(c) Comprueba que

$$e(\xi, t) = \frac{1}{2} \left|\widehat{u}_t(\xi, t)\right|^2 + \mid \xi \mid^4 \left|\widehat{u}(\xi, t)\right|^2$$

es independiente de t.

(d) Deduce que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{I\!R^2} \left[\left|u_t(x,t)\right|^2 + \left|\Delta u(x,t)\right|^2\right] dx \tag{0.2}$$

se mantiene constante para las soluciones de (0.1).

(e) Comprueba que la conservación de la energía E de (0.2) puede obtenerse multiplicando en (0.1) por u_t e integrando por partes.

(f) Utiliza esta última técnica para deducir que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u_t(x,t)|^2 + |\Delta u(x,t)|^2\right] dx$$

también se conserva para las soluciones del problema

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

Problema 29.

Consideramos la ecuación, con $\nu > 0$,

$$u_t - \nu\Delta u + \mid \nabla u \mid^2 = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N, t > 0. \tag{0.1}$$

1).- Introduce un cambio de variable $v = F(u)$ de modo que v satisfaga

$$v_t - \nu\Delta v = 0. \tag{0.2}$$

2).- Escribe explícitamente la solución de (0.12) por convolución con el núcleo del calor

$$G(t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\left(\frac{- \mid x \mid^2}{4t}\right) \tag{0.3}$$

si el dato inicial es

$$v(0) = v_0. \tag{0.4}$$

3).- Utilizando los dos apartados anteriores obten una exprexión para la solución de (0.11) tal que

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \mathbb{R}^N. \tag{0.5}$$

4).- Cálcula el límite de la solución u_ν de (0.11) cuando $\nu \to 0$.

Problema 30:

Consideramos la ecuación de Burgers

$$\begin{cases} \varepsilon u_t + u u_x = 0, \quad 0 < t & , x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.1}$$

siendo $\varepsilon > 0$.

1.- Escribir la ecuación de las rectas características de (0.1) y calcularlas explícitamente.

2.- Obtener una expresión ímplicita de la solución u.

Indicación: En la ecuación de transporte $$\varepsilon u_t + c u_x = 0$$ con c constante la expresión de la solución general es $$u = f(\varepsilon x - ct)$$

3.- Suponiendo que $\varphi \in C^1, \varphi \geq 0$ probar que el tiempo $T_\varepsilon > 0$ de existencia de solución de (0.11) sin que se produzcan choques depende de ε de modo que

(a) $T_\varepsilon \to \infty$ cuando $\varepsilon \to \infty$

(b) $T_\varepsilon \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

4.- Fijado $x \in I\!R$ y $t > 0$, ¿a qué converge la solución $u_\varepsilon(x,t)$ de (0.11) en ese punto cuando $\varepsilon \to \infty$?

5.- ¿Es el límite del apartado anterior solución de alguna ecuación y puede ésto interpretarse pasando el límite en la expresión equivalente a (0.11)

$$u_t + \frac{uu_x}{\varepsilon} = 0?$$

6.- ¿Qué ocurre cuando $\varepsilon \to 0$? Calcular explícitamente el límite cuando el dato inicial es positivo, creciente y satisface

$$\varphi(x) = 1 \text{ si } x \leq \ell$$

para algún $\ell \in I\!R$ e interpretar el resultado.

¿Ocurre lo mismo si

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1?$$

Analiza el mismo problema suponiendo que el dato incial es decreciente.

7.- Comprobar que, mediante un simple cambio de variable, la ecuación (0.11) puede reducirse al caso $\varepsilon = 1$ y explicar de este modo todos los resultados obtenidos.

Problema 31: Consideramos los siguientes operadores diferenciales en $I\!R^2$:

(a) ∂_t; (b) ∂_x; (c) $\partial_t\partial_x$; (d) $\partial_t^2 + \partial_t\partial_x$; (e) $\partial_t^2 + \partial_t\partial_x + \partial_x^2$; (f) $\partial_{tt} + \partial_{xx}$.

1.- Calcular todas las rectas características de cada uno de los operadores.

Supongamos ahora que $u = u(x,t)$ es una función solución de la ecuación

$$P(D)u = 0$$

en todo el plano $I\!R^2$, siendo $P(D)$ cualquiera de los operadores anteriores. Supongamos asimismo que $u = 0$ es el rectángulo $a < x < b$, $t_1 < t < t_2$.

2.- Dar la expresión analítica y gráfica del abierto maximal de $I\!R^2$ en el que podemos garantizar que $u \equiv 0$, mediante el Teorema de Holmgren.

3.- Justificar la optimalidad del resultado del apartado anterior en función de las expresiones de 1.- para las rectas características.

Problema 32:
Consideramos la ecuación de placas vibrantes

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 u + \mu\Delta u = f & \text{en} & \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

siendo Ω un dominio acotado de $I\!R^n$, $n \geq 1$ de clase C^∞.

$\boxed{1}$ Escribe la formulación débil de una solución $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ de (1.1). Comprueba que todas las integrales que intervienen en esta formulación convergen. Comprueba que se anulan todas las integrales frontera que aparecen al aplicar la fórmula de Green.

$\boxed{2}$ Construir un funcional $J : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to I\!R$ cuyos puntos críticos coincidan con las soluciones débiles de (1.1). Comprobar rigurosamente esta equivalencia. Probar que J es continuo.

$\boxed{3}$ Probar que si $\mu \leq 0$ J es convexo y coercivo y alcanza su valor mínimo.

$\boxed{4}$ Probar la existencia y unicidad de la solución débil de (1.1).

$\boxed{5}$ Prueba que si $\mu < \delta$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se sigue teniendo existencia y unicidad de la solución débil de (1.1).

> **Indicación:** Ante la posible ausencia de convexidad del funcional J utiliza la compacidad de la inclusión $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$.

Problema 33:
El objeto de este problema es caracterizar la mejor constante δ del apartado $\boxed{5}$ del problema anterior

Para ello consideramos el problema de autovalores:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = -\lambda \Delta u & \text{en} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

siendo Ω un abierto acotado.

$\boxed{1}$ Probar que existe una sucesión de autovalores

$$0 < \lambda_1, \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \to \infty,$$

de modo que las autofunciones correspondientes pueden ser elegidas de forma que constituyan una base ortogonal de $L^2(\Omega)$.

> **Indicación:** Utiliza el cambio de variables $\Delta u = v$ y los resultados conocidos sobre la descomposición espectral del Laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet.

$\boxed{2}$ Establece la relación existente para las cantidades

$$\int_\Omega e_k^2 dx; \int_\Omega |\nabla e_k|^2 \, dx : \int_\Omega |\Delta e_k|^2 \, dx,$$

siendo e_k una autofunción asociada al autovalor λ_k.

$\boxed{3}$ Comprueba que

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\ \Delta u\ |^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |\ \nabla u\ |^2 \, dx}.$$

$\boxed{4}$ Comprueba que si $\mu < \lambda_1$, el sistema (1.1) del problema anterior admite una solución única.

$\boxed{5}$ Supongamos ahora que $\mu = \lambda_1$. Construye un segundo miembro f de modo que el sistema (1.1) admita una infinidad de soluciones distintas.

Problema 34:
Consideramos el problema de evolución

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u_t + \Delta^2 u + \mu \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = \Delta u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

Suponemos que $u^0 \in L^2(\Omega)$ y que

$$u^0 = \sum_{k \geq 1} a_k e_k(x),$$

siendo $\{e_k\}_{k\geq 1}$ la base ortogonal de $L^2(\Omega)$ de autofunciones del problema anterior.

$\boxed{1}$ Desarrollar en series de Fourier la solución de (3.1).

$\boxed{2}$ Probar la estimación

$$(3.2) \qquad \| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1(\lambda_1 - \mu)t} \| u^0 \|_{L^2(\Omega)},$$

siendo λ_1 el primer autovalor del problema 2.

$\boxed{3}$ Observa que (3.2) cuando $\mu = \lambda_1$ no proporciona ningún decaimiento de la solución. Construye en este caso una solución tal que

$$\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} = \| u^0 \|_{L^2(\Omega)}, \ \forall t > 0.$$

$\boxed{4}$ Comprueba que cuando $\mu > \lambda_1$ existen soluciones cuya norma crece exponencialmente cuando $t \to \infty$.

$\boxed{5}$ Decimos que una función f crece con una tasa exponencial $\omega > 0$ si

$$f(t) \geq Ce^{\omega t}, \text{ cuando } t \to \infty$$

para alguna $C > 0$.

Comprueba que cuando $\mu \to \infty$ hay soluciones que crecen con una tasa exponencial $C(\mu)$, de modo que

$$C(\mu) \to \infty \text{ cuando } \mu \to \infty.$$

¿Podrías dar una expresión explícita de $C(\mu)$?

Problema 35:
El objeto de este ejercicio es resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{x,t} u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.3}$$

donde $\Delta_{x,t}$ denota el Laplaciano en las variables $x = (x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n$ y $t \in I\!R$, i.e.

$$\Delta_{x,t} u = \Delta_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

y

$$I\!R_+^{n+1} = \{(x,t) \in I\!R^{n+1} : t > 0\}.$$

1.- Aplicar la transformada de Fourier en la variable x, dejando fija la t, y comprobar que $\widehat{u}(\xi, t)$ satisface:

$$\begin{cases} -4\pi^2 \mid \xi \mid^2 \widehat{u}(\xi,t) + \partial_t^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0, \quad \xi \in I\!R^n, \quad t > 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases} \tag{0.4}$$

2.- Deducir que $\widehat{u}(\xi, t)$ es necesariamente de la forma

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi) \left[C(\xi) e^{-2\pi|\xi|t} + (1 - C(\xi)) e^{2\pi|\xi|t} \right].$$

En lo que sigue tomamos $C(\xi) = 1$ para todo $\xi \in I\!R^n$.

3.- Comprobar que la transformada inversa de Fourier de la función $\xi \mapsto e^{-2\pi|\xi|t}$ es la función

$$P_t(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + \mid x \mid^2)^{(n+1)/2}},$$

siendo

$$\Gamma((n+1)/2) = \int_0^\infty e^{-\sigma} \sigma^{(n-1)/2} d\sigma,$$

utilizando que

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{\beta^2/4s} ds.$$

y que la transformada de Fourier de $x \mapsto e^{-\pi a|x|^2}$ es $\xi \mapsto a^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

4.- Deducir que

$$u(x,t) = (P_t * f)(x),$$

donde $*$ denota la convolución en las variables $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

5.- Queremos ahora calcular el valor de $\partial_t u(x, 0)$.

Comprueba en primer lugar que

$$-\partial_t \widehat{u}(\xi, 0) = 2\pi \mid \xi \mid \widehat{f}(\xi).$$

Deduce entonces una expresión para $\partial_t u(x,0)$ en función de f.

6.- Comprueba que

$$u(x,t) = (P_t * f)(x) + \alpha t \tag{0.5}$$

es también solución de (0.11) para todo $\alpha \in I\!R$.

7.- Supongamos que $f \in \mathcal{S}$ es tal que $u = T_t * f \in \mathcal{S}$. Comprueba que ninguna de las otras funciones de (0.13) con $\alpha \neq 0$ pertenece a la clase $\mathcal{S}$.

8.- Comprueba que sólo puede haber una solución u de (0.11) en la clase $\mathcal{S}$.

> **Indicación:** Suponiendo que hay dos soluciones $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ de (0.11) define $w = u_1 - u_2$, observa que
> $$\begin{cases} \Delta_{x,t} w = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ w(x,0) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$
> multiplica por w, integra en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ usando la fórmula de Green y deduce que necesariamente w es constante y concluye.

9.- ¿Se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalewski para probar la existencia y unicidad de las soluciones de (0.11)? ¿Por qué?

Problema 36:

1.- Probar que la solución de
$$\begin{cases} u_y = F(u_x) \\ u(x,0) = h(x) \end{cases} \tag{0.1}$$
viene dada por la expresión
$$u = (F(p) - pF'(p))y + h(x + yF'(p)) \tag{0.2}$$
siendo $p = p(x,y)$ la solución de la ecuación implícita
$$p = h'(x + yF'(p)). \tag{0.3}$$

2.- Indica las condiciones que han de satisfacerse para, aplicando el Teorema de la Función Implícita, poder garantizar que la solución p de (0.3) se puede efectivamente escribir como una función de (x,y), i.e. $p = p(x,y)$. Razona la respuesta.

3.- ¿Qué ocurre en el caso de la ecuación lineal en que $F(p) = p$? ¿La solución u que obtenemos de (0.2) y (0.3) coincide con la clásica conocida de la ecuación de transporte lineal $u_y = u_x$?

4.- Supongamos ahora que $F(p) = \frac{1}{2}p^2$ y que $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(\sigma)d\sigma$, $g \geq 0$, $g \in C_c(\mathbb{R})$.

Comprueba que si $v = v(x,y)$ es solución de
$$\begin{cases} v_y = vv_x \\ v(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{0.4}$$
entonces
$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{x} v(\sigma,y)d\sigma \tag{0.5}$$
es solución de (0.1).

Observa que de (0.5) se deduce inmediatamente que
$$u_x = v. \tag{0.6}$$

5.- Derivando en (0.2) con respecto a x, utilizando (0.3) y la expresión explícita $F(p) = p^2/2$, deduce que la solución v de (0.4) satisface la ecuación implícita

$$v = g(x + vy).$$

Problema 37:

Sea Ω un abierto de $I\!R^3$, acotado y de clase C^2. Consideramos el sistema de Lamé:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.7}$$

En (0.11) tanto f como u son funciones vectoriales:

$$f = (f_1, f_2, f_3)\,,\; u = (u_1, u_2, u_3)$$

de modo que, componente a componente, el sistema (0.11) se escribe:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_i - (\lambda+\mu)\partial_i \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j u_j \right) = f_i & \text{en} \quad \Omega \\ u_i = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, i = 1,2,3. \end{cases} \tag{0.8}$$

Suponemos que los coeficients de Lamé son tales que

$$\mu > 0,\; \lambda + \mu > 0. \tag{0.9}$$

$\boxed{\text{A}}$ Dar la formulación débil de la solución $u \in H = \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ de (0.11), suponiendo que $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$.

¿Cuál sería la formulación débil si

$$f = g + (h)$$

con $g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ y $h = (h_{ij})_{1\le i,\, j\le 3} \in \left(L^2(\Omega)\right)^9$?

$\boxed{\text{B}}$ Construye un funcional $J : H \to I\!R$ de modo que el punto mínimo de u sea una solución débil de (0.11).

$\boxed{\text{C}}$ Comprueba que J es:

- continuo
- convexo
- coercitivo

y deduce la existencia de un mínimo de J.

$\boxed{\text{D}}$ Comprueba rigurosamente que el mínimo de J es una solución débil de (0.11).

$\boxed{\text{E}}$ Prueba la unicidad de la solución débil.

¿Se puede probar la unicidad de más de una manera?

$\boxed{\text{F}}$ Suponemos ahora que $\Omega = I\!R^3$.
Comprueba que si u satisface

$$-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla u = f \text{ en } I\!R^3$$

entonces $v = u$ y $w = u$ satisfacen respectivamente

$$-(\lambda + 2\mu)\Delta v = f \text{ en } I\!R^3$$

y

$$-\mu\Delta w = f \text{ en } I\!R^3.$$

$\boxed{\text{G}}$ Hasta ahora, hemos hecho la hipótesis (3) sobre los coeficientes. ¿Crees que se puede debilitar esta hipótesis suponiendo que $\mu > 0$ pero permitiendo que λ sea ligeramente negativo? ¿En ese caso, cual crees que sería la cota inferior óptima para λ?

Problema 38: Sea Ω un dominio acotado de $I\!R^n$ de clase C^2.
Consideramos la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

$\boxed{\text{A}}$ Aplicando el Teorema de Hille-Yosida prueba que si $u_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, (0.1) admite una única solución

$$u \in C\left([0, \infty);\ H^2 \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right).$$

$\boxed{\text{B}}$ Prueba que si $u_0 \in L^2(\Omega)$, (0.1) admite una única solución

$$u \in C\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right).$$

Consideramos ahora la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

donde λ es un parámetro real.

$\boxed{\text{C}}$ Escribe la solución u_λ de (0.2) en función de la solución u de (0.1) y deduce que cuando $u_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, la aplicacón

$$\lambda \longmapsto u_\lambda$$

es continua de $I\!R$ en $C\left([0, \infty);\ H^2 \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty);\ L^2(\Omega)\right)$.

$\boxed{\text{D}}$ ¿Cuál es el límite de u_λ cuando $\lambda \to 0$?

$\boxed{\text{E}}$ ¿Cuál es el límite de u_λ cuando $\lambda \to \infty$ y $t > 0$?

¿La convergencia es uniforme para $t \in [0, 1]$?

Problema 39:
Consideramos la ecuación de ondas disipativa

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{en} & I\!\!R^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x),\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{en} & I\!\!R^n. \end{array} \right. \tag{0.3}$$

$\boxed{1}$ Comprobar que para cada $(u_0, u_1) \in H$ con

$$H = H^1(I\!\!R^n) \times L^2(I\!\!R^n) \tag{0.4}$$

existe una única solución

$$u \in C\left([0, \infty); H^1(I\!\!R^n)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(I\!\!R^2)\right). \tag{0.5}$$

$\boxed{2}$ Comprobar que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{I\!\!R^n} \left[\mid \nabla u(x, t) \mid^2 + \mid u_t(x, t) \mid^2 \right] dx \tag{0.6}$$

satisface

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \int_{I\!\!R^n} \mid u_t(x, t) \mid^2 dx. \tag{0.7}$$

Aplicamos ahora la transformada de Fourier

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{I\!\!R^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x, t) dx. \tag{0.8}$$

$\boxed{3}$ Comprobar que

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u} + \mid \xi \mid^2 \widehat{u} + \frac{d}{dt}\widehat{u} = 0. \tag{0.9}$$

Deducir una expresión explícita de $\widehat{u}(\xi, t)$ en función de la transformada de Fourier de los datos iniciales.

$\boxed{4}$ Comprueba que para cada $\xi \neq 0$ la solución $\widehat{u}(\xi, t)$ decae exponencialmente, i.e.

$$|\widehat{u}_t(\xi, t)|^2 + \mid \xi \mid^2 |\widehat{u}(\xi, t)|^2 \leq C(\xi) e^{-\omega(\xi)t}. \tag{0.10}$$

¿Cómo depende $C(\xi)$ de los datos iniciales de (0.11)?

¿Qué ocurre con $\omega(\xi)$ cuando $\xi \to 0$?

$\boxed{5}$ Teniendo en cuenta que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{I\!\!R^n} \left[|\widehat{u}_t(\xi, t)|^2 + \mid \xi \mid^2 |\widehat{u}(\xi, t)|^2 \right] d\xi$$

y (0.18) deduce que

$$E(t) \leq Ct^{-(n+1)}$$

siendo C una constante que depende de los datos iniciales que supondremos C^∞ y de soporte compacto.

Indicación: Descomponed la integral

$$\int C(\xi) e^{-\omega(\xi)t}$$

en las regiones $\mid \xi \mid < 1/2$ y $\mid \xi \mid > 1/2$ y utilizad que la transformada de Fourier $\widehat{\ }$envia continuamente $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.

Problema 40: Consideramos la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.11}$$

$\boxed{1}$ Comprobar que para cada $(u_0, u_1) \in H$ con

$$H = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \tag{0.12}$$

existe una única solución

$$u \in C\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2)\right). \tag{0.13}$$

$\boxed{2}$ Comprobar que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2\right] dx \tag{0.14}$$

satisface

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} \mid u_t(x,t) \mid^2 dx. \tag{0.15}$$

Aplicamos ahora la transformada de Fourier

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x,t) dx. \tag{0.16}$$

$\boxed{3}$ Comprobar que

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u} + \mid \xi \mid^2 \widehat{u} + \frac{d}{dt}\widehat{u} = 0. \tag{0.17}$$

Deducir una expresión explícita de $\widehat{u}(\xi, t)$ en función de la transformada de Fourier de los datos iniciales.

$\boxed{4}$ Comprueba que para cada $\xi \neq 0$ la solución $\widehat{u}(\xi, t)$ decae exponencialmente, i.e.

$$\left|\widehat{u}_t(\xi,t)\right|^2 + \mid \xi \mid^2 \left|\widehat{u}(\xi,t)\right|^2 \leq C(\xi) e^{-\omega(\xi)t}. \tag{0.18}$$

¿Cómo depende $C(\xi)$ de los datos iniciales de (0.11)?

¿Qué ocurre con $\omega(\xi)$ cuando $\xi \to 0$?

$\boxed{5}$ Teniendo en cuenta que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\widehat{u}_t(\xi, t)|^2 + |\ \xi\ |^2\ |\widehat{u}(\xi, t)|^2 \right] d\xi$$

y (0.18) deduce que

$$E(t) \leq Ct^{-(n+1)}$$

siendo C una constante que depende de los datos iniciales que supondremos C^∞ y de soporte compacto.

Indicación: Descomponed la integral $$\int C(\xi) e^{-\omega(\xi)t}$$ en las regiones $\mid \xi \mid < 1/2$ y $\mid \xi \mid > 1/2$ y utilizad que la transformada de Fourier $\widehat{\ }$ envia continuamente $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $C_0(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.