ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Enrique Zuazua

enrique.zuazua@uam.es

Contents

1 Introducción y motivación

Estas notas constituyen una breve introducción a la teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

La forma en la que las EDP se presentan habitualmente en la modelización de fenómenos de la Ciencia y Tecnología es la de modelos de evolución en los que se describe la dinámica a lo largo del tiempo de determinada cantidad o variable (también a veces denominada *estado*) que puede representar objetos de lo más diversos que van desde la posición de un satélite en el espacio hasta la dinámica de un átomo, pasando por los índices bursátiles o el grado en que una enfermedad afecta a la población. En otras palabras, los modelos dinámicos o de evolución son los más naturales en la medida que reproducen nuestra propia concepción del mundo: un espacio tri-dimensional que evoluciona y cambia en el tiempo.

Cuando el estado o variable de un modelo o sistema de evolución es finito-dimensional, el modelo más natural es un sistema de EDO, cuya dimensión coincide precisamente con el del número de parámetros necesarios para describir dicho estado. Así, por ejemplo, para posicionar una partícula en el espacio necesitamos de tres variables dependientes del tiempo y para describir su dinámica un sistema de tres ecuaciones diferenciales. Pero en muchas ocasiones, como es el caso sistemáticamente en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos, la variable de estado es infinito-dimensional. Esto ocurre por ejemplo cuando se pretende describir la deformación de cuerpos elásticos o la temperatura de un cuerpo sólido en los que la deformación o temperatura de cada uno de los puntos de ese medio continuo constituye una variable o incógnita del sistema. Los modelos matemáticos naturales en este caso son las EDP.

En la teoría clásica de EDP éstas se clasifican en tres grandes grupos: *elípticas, parabólicas e hiperbólicas.*

El modelo elíptico por excelencia involucra el *operador de Laplace*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2. \tag{1.1}$$

La variable tiempo está ausente en este modelo. Es por eso que sólo permite describir estados estacionarios o de equilibrio.

Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas, representadas respectivamente por la *ecuación del calor* y la *de ondas*, son los modelos clásicos en el contexto de las EDP de evolución. Sus características matemáticas son bien distintas. Mientras que la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita, la ecuación de ondas es el prototipo de modelo de propagación a velocidad finita y completamente reversible en tiempo.

El operador del calor es

$$\partial_t - \Delta, \tag{1.2}$$

de modo que al actuar sobre una función $u = u(x,t)$ que depende de la variable espacio-tiempo $(x,t) \in I\!R^N \times (0,\infty)$ tiene como resultado

$$[\partial_t - \Delta]\, u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{1.3}$$

Sin embargo, el operador de ondas o de D'Alembert es de la forma

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta \tag{1.4}$$

y da lugar a

$$\Box u = \left[\partial_t^2 - \Delta\right] u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u. \tag{1.5}$$

La irreversibilidad temporal de (1.3) es evidente. Si hacemos el cambio de variable $t \to \widetilde{t} = -t$, el operador (1.3) cambia y da lugar al operador del calor retrógrado $\partial_{\widetilde{t}} + \Delta$ mientras que el operador de ondas permanece invariante.

El operador del calor y de ondas se distinguen también por sus ámbitos de aplicación. Mientras que el primero es habitual en la dinámica de fluidos (a través de una versión más sofisticada, el operador de Stokes) o en fenómenos de difusión (del calor, de contaminantes,...), el operador de ondas y sus variantes intervienen de forma sistemática en elasticidad (frecuentemente a través de sistemas más sofisticados, como el de Lamé, por ejemplo) o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell).

La Mecánica de Medios Continuos está repleta también de otras ecuaciones, operadores y modelos, pero en todos ellos, de una u otra manera, encontraremos siempre el operador del calor, de ondas o una variante muy próxima de los mismos.

Frecuentemente los modelos son más sofisticados que una "simple" ecuación aislada. Se trata a menudo de sistemas acoplados de EDP en los que es habitual encontrar tanto componentes parabólicos como hiperbólicos. Es el caso por ejemplo de las ecuaciones de la *termoelasticidad*. En estos casos, si bien un buen conocimiento de los aspectos más relevantes de la ecuación del calor y de ondas aisladamente puede no ser suficiente a causa de las interacciones de los diferentes componentes, sí que resulta indispensable.

Por todo ello es natural e importante entender todos los aspectos matemáticos fundamentales de estas dos piezas clave: la ecuación del calor y la de ondas. Evidentemente esto es también cierto desde el punto de vista del Análisis y del Cálculo Numérico.

Hasta ahora nos hemos referido sólo a las ecuaciones del calor y de ondas en su expresión más sencilla: con coeficientes constantes. Estas ecuaciones, cuando modelizan fenómenos en medios heterogéneos (compuestos por materiales de diversa naturaleza) adoptan formas más complejas y se presentan con coeficientes variables, dependientes de la variable espacial x, de la variable temporal t o de ambas.

En esta introducción no hemos mencionado para nada otras palabras clave en la modelización de fenómenos complejos como son los términos "no-lineal" y "no-determinista". La aproximación numérica de modelos de EDP que involucran estos fenómenos queda fuera de los objetivos de este curso pero, nuevamente, se puede asegurar que los elementos que aquí expondremos serán sin duda de gran utilidad, si no indispensables, a la hora de adentrarse en otros modelos más complejos que involucren términos no-lineales y estocásticos.

En estas notas desarrollaremos parte de lo que es una teoría general de EDP que involucra el teomrea de Cauchy-Kovalevskaya, la tranformada de Fourier, los espacios de Sobolev, y muchos otros conceptos y técnicas importantes del Análisis Matemático. Pero el curso también estará dedicado a estudiar con cierto detalle los modelos más importantes como son la ecuación de Laplace, del calor y de ondas. Si bien la mayor parte del curso estará dedicada a problemas lineales, analizaremos también la ecuación de Burgers y su aproximación viscosa, como ejemplos más simples y significativos de modelos no-lineales en los que las soluciones desarrollan singularidades en tiempo finito.

La teoría de EDP es evidentemente una generalización y extensión de la teoría de EDO. A lo largo de las notas intentaremos establecer paralelismos entre una y otra. Pero la teoría que desarrollaremos es mucho más sofisticada que la clásica de EDO. En la teoría de EDP necesitamos desarrollar conceptos como superficie característica, distinguir las clases de soluciones, analizar cuidadosamente la dependencia (regularidad) de las soluciones con respecto a la variable espacial, necesidades que no se presentan en el marco de la teoría de EDO.

2 ¿Qué es una ecuación en derivadas parciales?

Una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) es una relación de la forma

$$F\left(x,t,u,\partial_{x_1}u,\dots\partial_{x_n}u,\ \partial_t u,\dots,D^{\alpha}u\right)=0. \tag{2.1}$$

En ella $u=u(x,t)$, una función de la variable espacial $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y de la variable temporal t, es la incógnita.

La incógnita u representa una cantidad física, como por ejemplo, temperatura, concentración de un contaminante, intensidad de una señal acústica, deformación de una estructura, etc.

La ley (2.1), normalmente derivada en el ámbito de la Mecánica, establece una relación entre la incógnita u, sus derivadas parciales hasta un cierto orden y el punto (x,t) espacio-temporal.[1]

[1]Desde un punto de vista estrictamente matemático no hay ninguna razón para distinguir la variable temporal t de las n variables espaciales $x_1,...,x_n$. Podríamos simplemente denotarla como x_{n+1} y considerar u como una función de $n+1$ variables $x_1,...,x_n,x_{n+1}$. Sin embargo, de acuerdo a nuestra concepción del universo, conviene normalmente distinguir la variable temporal de las demás. De hecho, frecuentemente,

En (2.1) utilizamos la notación habitual para las derivadas parciales de modo que $\partial_{x_j} u$ denota la derivada parcial de u con respecto a la variable espacial x_j, $\partial u/\partial x_j$, mientras que $\partial_t u$ lo es respecto a la variable temporal. A veces, cuando no haya riesgo de confusión, utilizaremos también la notación $\partial_j u$.

En (2.1) hemos utilizado también la notación de Schwartz según la cual $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es un multiíndice perteneciente a $\mathbb{R}^{n+1}$ de modo que $D^\alpha u$ denota una derivada parcial iterada de u de orden $\mid \alpha \mid = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ en la que derivamos α_0 veces con respecto a la variable t y α_j veces en cada una de las variables x_j. De este modo, el orden de la EDP (2.1) es el de la derivada de mayor orden involucrada, i.e. el máximo de los módulos $\mid \alpha \mid$ de los índices α que intervienen en (2.1). Cuando la incógnita u de (2.1) no es una función escalar sino un vector

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

(2.1) puede también representar un sistema de ecuaciones. En ese caso F es también una función vectorial. Si F tiene M componentes (2.1) es pues un sistema de M ecuaciones con N incógnitas.

La ecuación (2.1) puede ser lineal o no-lineal dependiendo de que F lo sea o no. En el marco de las ecuaciones no-lineales se distingue también a veces entre las ecuaciones semilineales, cuasilineales y fuertemente no lineales, dependiendo de si la no-linealidad de la función F afecta a la incógnita u, a algunas de sus derivadas, o a las derivadas de mayor orden que intervienen en (2.1). En este curso no entraremos en un análisis exhaustivo de esta cuestión. Si que conviene sin embargo subrayar que las EDP no-lineales, lejos de ser problemas puramente académicos, intervienen de manera decisiva en muchos e importantes ámbitos de las Ciencias y la Tecnología. Tal y como mencionábamos anteriormente, en estas notas analizaremos la ecuación de Burgers, como ejemplo paradigmático de ecuación no-lineal sencillo pero a la vez importante.

3 El método de Cauchy en EDO

En esta sección introducimos el método de Cauchy para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) para después abordar el caso de la EDP, lo cual nos conducirá al Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

Cauchy fue uno de los primeros en abandonar, al menos parcialmente, la idea de resolver

consideraremos a la función $u(x,t)$, como una función del tiempo t a valores en un espacio de funciones $u(\cdot,t)$ que, en el trancurso del mismo, va tomando diferentes valores siendo cada uno de ellos una función de la variable espacial x.

las EDO explícitamente y en proporcionar un método sistemático para resolver “todas” las EDO. Como veremos, el método de Cauchy permite en efecto probar que una EDO con coeficientes análiticos y datos iniciales admite una única solución analítica local en tiempo.

La idea de Cauchy es sumamente natural y a la vez eficaz. Para ilustrarla consideramos el caso sencillo de la EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Por supuesto, la solución de (3.1) puede calcularse de manera explícita. En el caso homogéneo en que $b \equiv 0$ tenemos

$$x(t) = x_0 e^{-A(t)}, \quad A(t) = \int_0^t a(s)ds. \tag{3.2}$$

Cuando $b \not\equiv 0$ la solución puede calcularse fácilmente mediante el método de variación de las constantes[2]. Obtenemos así

$$x(t) = x_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s)ds = x_0 e^{-A(t)} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)ds. \tag{3.3}$$

A pesar de que la solución (3.3) de (3.1) es explícita es interesante analizar (3.1) con el método de Cauchy para ilustrar con claridad la idea fundamental del mismo.

Cauchy buscó soluciones $x(t)$ analíticas reales, i.e. que admitiesen un desarrollo en serie de potencias convergente en un entorno de $t = 0$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k. \tag{3.4}$$

Obviamente, buscar una función $x = x(t)$ de esta forma equivale a buscar los coeficintes $\{x_k\}_{k \geqslant 0}$ de su desarrollo en serie de potencias.

Cauchy observó que estos coeficientes $\{x_k\}_{k \geqslant 0}$ pueden determinarse de manera única a partir de los coeficientes y segundo miembro de la ecuación. Supongamos por tanto que $a = a(t)$ y $b = b(t)$ son funciones analíticas reales que admiten el desarrollo en serie de potencias:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{3.5}$$

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k. \tag{3.6}$$

[2]En este caso basta con observar que $y(t) = e^{A(t)}x(t)$ es solución de $y'(t) = e^{A(t)}b(t)$ con dato inicial $y(0) = x_0$, i. e. $y(t) = y_0 + \int_0^t e^{A(s)}b(s)ds = x_0 + \int_0^t e^{A(s)}b(s)ds$.

Insertando la expresión (3.4) del desarrollo en serie de potencias de la incógnita x y usando los de los datos (3.5) y (3.6) obtenemos la identidad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx_k t^{k-1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k. \tag{3.7}$$

Para obtener (3.7) hemos utilizado el hecho conocido de que $x'(t)$ admite también un desarrollo en serie de potencias de la forma[3]

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k t^{k-1}. \tag{3.8}$$

El siguiente paso consiste en desarrollar el producto de las dos series de potencias en (3.7):

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j x_{k-j}\right) t^k. \tag{3.9}$$

Como el producto de funciones analíticas es también analítico vemos que la serie producto es también convergente por lo que lo hecho hasta ahora es plenamente riguroso.

En virtud de (3.7) y (3.9), y utilizando el hecho de que para que dos series de potencias coincidan han de hacerlo uno a uno todos sus coeficientes, obtenemos que:

$$(k+1)x_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} a_j x_{k-j} = b_k, \quad k \geqslant 0. \tag{3.10}$$

La identidad (3.10) proporciona una fórmula de recurrencia que permite calcular el $(k+1)$-ésimo coeficiente del desarrollo de x a partir de los k primeros y de los coeficientes de a y b. Sin embargo, para poder identificar plenamente la incógnita x precisamos su primer coeficiente x_0. Este viene determinado por el dato inicial x_0 de la EDO (3.1).

Calculando unos pocos términos obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_0 - a_0 x_0 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left[b_1 - a_0 x_1 - a_1 x_0\right] \\
x_3 &= \frac{1}{3}\left[b_2 - a_0 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_0\right] \\
&\ldots .
\end{aligned}$$

La argumentación anterior permite ver que el método de Cauchy proporciona todos los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la incógnita solución x que queda perfectamente identificada.

[3]Es una hecho bien conocido que una serie de potencias es de clase C^∞ en el interior de su intervalo de convergencia y que la derivada de la serie coincide con la serie de las derivadas.

Pero Cauchy llegó más lejos y probó que el desarrollo en serie de potencias así obtenido converge. De esta manera demostró que *la solución del problema de valores iniciales para una EDO con coeficientes analíticos existe, es analítica y es única.*

Conviene resaltar que el método de Cauchy es constructivo de modo que puede fácilmente implementarse en el ordenador para obtener aproximaciones numéricas. Además, tal y como veremos en la sección dedicada al Teorema de Cauchy-Kovalevskaya, se pueden obtener estimaciones muy explícitas sobre el radio de convergencia de la solución.

Aquí hemos presentado el método de Cauchy en un caso muy sencillo (3.1). Pero el método puede también extenderse a sistemas de EDO no-lineales. La extensión a las EDP necesitó de la contribución fundamental de Sonia Kovalevskaya.

4 Funciones analíticas reales en varias variables

En esta sección recordamos muy brevemente las propiedades más importantes de las funciones analíticas reales. Para ello seguiremos el contenido de la sección 4.6.2 del libro de Evans [3]. El libro de John [5] desarrolla este material con algo más de detalle.

Esencialmente, las funciones analíticas reales en varias variables son aquéllas que, lo mismo que en una sola variable, admiten un desarrollo en series de potencias. Estas funciones se identifican a través de sus coeficientes, lo cual es sumamente útil a la hora de aplicar el método de Cauchy. Las funciones en cuestión son, por supuesto, infinitamente derivables (i.e. son de clase C^∞) y admiten una relación de orden o de comparación que será sumamente útil a la hora de probar la convergencia de las series obtenidas al aplicar el método de Cauchy en el contexto de las EDP.

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *analítica real* en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe $r > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha, \quad | x - x_0 | \leq r. \tag{4.1}$$

La suma en (4.1) se toma a lo largo de todos los multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Se puede comprobar que toda función analítica real es de clase C^∞. Además las constantes f_α del desarrollo de serie de potencias (4.1) pueden calcularse explícitamente evaluando las sucesivas derivadas de f en $x = x_0$, i.e.

$$f_\alpha = D^\alpha f(x_0) \Big/ \alpha!. \tag{4.2}$$

Por tanto, las funciones analíticas reales coinciden con su *desarrollo de Taylor*:

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha, \ | x - x_0 | < r. \tag{4.3}$$

Sin perdida de generalidad y con el objeto de simplificar la notación en lo sucesivo suponemos que $x_0 = 0$.

El siguiente ejemplo de función analítica juega un papel muy importante en la prueba del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya:

$$f(x) = \frac{r}{r - (x_1 + \cdots + x_n)}. \tag{4.4}$$

Se trata efectivamente de una función analítica en la esfera $\mid x \mid < r \Big/ \sqrt{n}$.

Su desarrollo en serie de potencias es fácil de calcular a través de lo que ya conocemos de la teoría de funciones de una sola variable:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{r}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{r}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} \sum_{|\alpha|=k} \binom{\mid \alpha \mid}{\alpha} x^\alpha = \sum_{\alpha} \frac{\mid \alpha \mid!}{r^{|\alpha|}\alpha!} x^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Es fácil comprobar que esta serie de potencias es absolutamente convergente para $\mid x \mid < r \Big/ \sqrt{n}$. En efecto,

$$\sum_{\alpha} \frac{\mid \alpha \mid!}{r^{|\alpha|}\alpha!} \mid x \mid^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mid x_1 \mid + \cdots + \mid x_n \mid}{r}\right)^k < \infty$$

puesto que

$$\frac{\mid x_1 \mid + \cdots + \mid x_n \mid}{r} \leqslant \frac{\sqrt{n} \mid x \mid}{r} < 1,$$

para todo x tal que $|x| < r/\sqrt{n}$.

Establezcamos ahora una relación de orden en la clase de funciones analíticas que jugará un papel muy importante en la demostración del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

Dadas dos funciones analíticas f y g representadas en series de potencias en la forma

$$f(x) = \sum_{\alpha} f_\alpha x^\alpha, \; g(x) = \sum_{\alpha} g_\alpha x^\alpha, \tag{4.6}$$

diremos que g *mayora* a f y lo representaremos escribiendo

$$g \gg f, \tag{4.7}$$

si

$$g_\alpha \geqslant \mid f_\alpha \mid, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{4.8}$$

La relación de mayoración establece una cierta jerarquía en la clase de funciones analíticas. Así, por ejemplo, si $g \gg f$ y g converge para $\mid x \mid < r$ también el desarrollo de Taylor de f

converge. Dicho en otras palabras, las funciones mayoradas por una función g dada heredan de esta última la esfera donde el desarrollo en serie de potencias converge. Esta propiedad es sumamente útil a la hora de probar la convergencia de series de potencias por comparación.

Verifiquemos que lo que acabamos de decir es cierto. Como $g \gg f$ tenemos que

$$\sum_{\alpha} \left| f_{\alpha} \right| \mid x \mid^{\alpha} \leqslant \sum_{\alpha} g_{\alpha} \mid x \mid^{\alpha} .$$

Ahora bien, como la segunda serie converge, la primera lo hace también y por tanto la serie

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$$

converge absolutamente en la bola $\mid x \mid < r$.

Se puede también probar la propiedad recíproca en el sentido que si $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$ converge en $\mid x \mid < r$ entonces admite una mayorante explícita en cada subesfera $\mid x \mid < s\sqrt{n} < r$.

5 El método de Cauchy y las superficies no-características*

6 El Teorema de Cauchy-Kovalevskaya*

7 Caracterización de superficies no-características

Tal y como hemos visto en las secciones anteriores, el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya asegura que el clásico Teorema de Cauchy de la teoría de EDO (que garantiza que toda EDO con coeficientes analíticos tiene una única solución local analítica) es cierto también en el marco de las EDP cuasilineales bajo la condición adicional de que la superficie sobre la que se dan los datos de Cauchy sea analítica y no característica.

Conviene pues tener una caracterización sencilla que permita verificar cuándo una hipersuperficie es característica o no. Esto es particularmente fácil de hacer en el marco de las EDP lineales con coeficientes constantes.

Consideremos pues operadores diferenciales de la forma

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_{\alpha} D^{\alpha} \tag{7.1}$$

donde $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$, para cada $\mid \alpha \mid \leqslant k$. Se trata en efecto de un operador diferencial lineal de orden k con coeficientes constantes.

La parte principal de este operador viene dada por los términos de orden superior, k en este caso:

$$P_p(D) = \sum_{|\alpha| = k} a_{\alpha} D^{\alpha}, \tag{7.2}$$

al que podemos asociar su polinomio característico

$$P_p(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha. \tag{7.3}$$

Dado un hiperplano H de dimensión $n-1$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ éste es característico si y sólo sí su vector normal $\vec{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ es un cero de este polinomio, es decir, si

$$P_p(\nu) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \nu_1^{\alpha_1} \cdots \nu_n^{\alpha_n} = 0. \tag{7.4}$$

De esta caracterización se deduce fácilmente que el hecho que un hiperplano sea característico es algo muy excepcional, dado que el conjunto de ceros de un polinomio en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto muy pequeño (de medida nula, en particular).

Por otra parte, de la construcción desarrollada en el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya (C-K) es fácil convencerse de que sólo la parte principal del operador puede afectar a la condición de que el hiperplano sea característico. En efecto, tal y como veíamos, la única dificultad que surge en la identificación de todos los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la solución ocurre a la hora de calcular los coeficientes correspondientes a la derivada normal (en la dirección normal a la superficie donde se dan los datos de Cauchy) de orden mayor o igual al orden del operador involucrado en la EDP.

Por último, no es difícil comprobar a través de la definición de derivada direccional que el caso patológico en que la identificación no puede ser realizado, es decir, en que el hiperplano es característico, es cuando el vector normal $\vec{\nu}$ es un cero del polinomio $P_p(\cdot)$.

Veamos ahora cómo se puede usar esta caracterización en los ejemplos más clásicos de la ecuación de Laplace, del calor y de ondas.

• **La ecuación de Laplace**

El operador de Laplace viene dado por

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i^2}. \tag{7.5}$$

Se trata pues de un operador de orden 2 puro en el que su parte principal es todo el operador Δ.

El polinomio característico del operador de Laplace es por tanto:

$$P_\Delta(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = \mid \xi \mid^2 \tag{7.6}$$

y por consiguiente P_Δ no admite ningún cero no trivial. Esto significa que ningún vector puede ser normal a un hiperplano característico. y en definitiva que ninguna hipersuperficie es caracgterística.

Por lo tanto, sea cual sea la hipersuperficie analítica considerada, el problema de Cauchy está bien puesto localmente en el marco de las soluciones analíticas, en el sentido del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

En particular, se deduce el siguiente resultado:

Sea $\mathcal{S}$ una hipersuperficie analítica de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. Sea f una función analítica definida en un entorno de $\mathcal{S}$. Sean φ_0 y φ_1 funciones analíticas definidas sobre la superficie $\mathcal{S}$.

Entonces, para todo $x_0 \in \mathcal{S}$, existe un entorno $\mathcal{N}_{x_0}$ de x_0 en $\mathbb{R}^n$ en el que el problema de Cauchy admite una única solución analítica:

$$\left\{\begin{array}{lll} \Delta u = f & en & \mathcal{N}_{x_0} \\ u = \varphi_0 & en & \mathcal{S} \cap \mathcal{N}_{x_0} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1 & en & \mathcal{S} \cap \mathcal{N}_{x_0}. \end{array}\right. \tag{7.7}$$

Conviene subrayar que la única diferencia de este enunciado con el que es válido gracias al Teorema de Cauchy-Kovalevskaya es que, en este caso, no hace falta que impongamos a $\mathcal{S}$ la hipótesis de ser no característico.

• **La ecuación del calor:**

Consideramos ahora el operador del calor:

$$\partial_t - \Delta_x. \tag{7.8}$$

Tratándose de un operador de orden dos su parte principal es $-\Delta_x$ y el símbolo correspondiente $P_p(\xi, \tau) = - \mid \xi \mid^2$.

Conviene observar que, en este caso, P_p es un polinomio en las variables $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ puesto que consideramos un operador diferencial en las variables $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Los vectores normales a los hiperplanos característicos son por tanto de la forma $\vec{\nu} = (0, \tau)$. Es decir se trata de vectores perpendiculares al eje temporal. Los hiperplanos característicos son entonces de la forma:

$$\{x = \mathrm{cte}\}. \tag{7.9}$$

Es por ésto que el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - \Delta_x u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. \tag{7.10}$$

es un problema característico al que no se puede aplicar el Teorema de C-K.

De hecho está claro que en este problema los datos de Cauchy están sobredeterminados puesto que, si

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \tag{7.11}$$

también se cumple necesariamente que

$$\Delta_x u(x,0) = \Delta_x \varphi_0(x). \tag{7.12}$$

De la ecuación del calor se deduce entonces que

$$u_t(x,0) = \Delta_x \varphi_0(x), \tag{7.13}$$

lo cual muestra que, para que pueda existir una solución del problema de Cauchy, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad

$$\varphi_1(x) = \Delta_x \varphi_0(x). \tag{7.14}$$

Vemos pues que el problema de Cauchy no siempre tiene solución.

Conviene sin embargo observar que, si bien la ecuación del calor es de orden dos, es sólo de primer orden en la variable temporal. Por tanto, (7.10) cabe también interpretarse como una ecuación de evolución de orden uno. Si así fuese, sería razonable considerar el problema de valores iniciales en el que sólo se impone el valor de la solución en la superficie característica $t = 0$ pero no el de la derivada temporal:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{7.15}$$

Este problema de valores iniciales si que está bien puesto pero sólo en el sentido positivo del tiempo, i.e. para $t > 0$. La solución de (7.15) viene dada a través de la convolución con la solución fundamental:

$$\mathcal{G}(x,t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp(- \mid x \mid^2 / 4t). \tag{7.16}$$

En efecto la solución de (7.15) es

$$u(x,t) = [G(x,t) * \varphi](x), \tag{7.17}$$

donde $*$ denota la convolución en la variable espacial exclusivamente, es decir,

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(- \frac{\mid x-y \mid^2}{4t} \right) \varphi(y) dy. \tag{7.18}$$

Este problema será desarrollada con más detallle en la sección 13.

• **La ecuación de ondas**

Consideramos ahora el operador de ondas o de d'Alembert

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta_x. \tag{7.19}$$

Se trata de un operador de orden dos donde la parte principal es, como en la ecuación de Laplace, el propio operador.

En este caso el polinomio característico es de la forma

$$P(\xi\tau) = \tau^2 - \mid \xi \mid^2 . \tag{7.20}$$

Por tanto los vectores normales a los hiperplanos característicos son de la forma $(\xi, \pm \mid \xi \mid)$ y los hiperplanos característicos son planos inclinados de pendiente unidad. Se trata pues de planos tangentes al *cono de luz*

$$\mid x \mid = t \tag{7.21}$$

o a sus traslaciones

$$\mid x - x_0 \mid = t - t_0. \tag{7.22}$$

En el caso de una sola variable espacial la ecuación de ondas se reduce a

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{7.23}$$

y el problema de valores iniciales correspondiente es por tanto

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.24}$$

Se trata obviamente de un problema no característico en el que los datos de Cauchy están dados sobre la recta no característica $t = 0$.

La fórmula de d'Alembert proporciona en este caso la expresión explícita de la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds. \tag{7.25}$$

De esta expresión se deduce que la solución está por tanto globalmente definida. Cuando los datos f y g son funciones analíticas, la solución también lo es. Pero la fórmula (7.25) tiene también la virtud de proporcionar una expresión de la solución para datos iniciales f y g mucho menos regulares. Por ejemplo, cuando f es continuo y g es integrable, (7.25) representa una función continua. Pero la fórmula (7.25) tiene incluso sentido para funciones f y g localmente integrables (en el sentido de Lebesgue) y por tanto permite también representar las soluciones débiles de la ecuación.

Esta fórmula permite también observar la velocidad finita de propagación en el proceso descrito por la ecuación de ondas ($= 1$ en este caso). En particular, el valor de la solución u en el punto (x,t) depende del de los datos iniciales en el intervalo $[x-t, x+t]$ denominado *dominio de dependencia*, mientras que el valor de los datos iniciales en el punto x_0 sólo afecta al valor de la solución en el interior del cono $|x - x_0| \leq t$, también conocido como *región de influencia*.

En el caso de varias variables espaciales se pueden también obtener fórmulas de representación explícita de las soluciones aunque en estos casos son algo más complejos. Conviene se nalar que:

- En tres dimensiones espaciales, *el método de las medias esféricas* permite reducir el cálculo de la solución general al caso particular de las soluciones radiales para las que $u = u(r, t)$, con $r = |x|$. En este caso la ecuación de ondas se escribe

  $$u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r} u_r = 0.$$

  El cambio de variables $v = ru$ reduce ésta a la ecuación de ondas pura en una dimensión: $v_{tt} - v_{rr} = 0$. Esto permite obtener una expresión explícita de la solución radial de la que después se obtiene la solución general.

- Una vez de haber obtenido la solución de la ecuación de ondas en tres dimensiones, la solución en dos dimensiones se puede obtener por *el método del descenso*. Basta para ello considerar la solución $u = u(x, y, t)$ como una solución de la ecuación de ondas en tres dimensiones independiente de la variable z.

8 ¿Soluciones locales o globales?

Tal y como hemos subrayado en secciones anteriores, el Teorema de C-K proporciona soluciones locales, definidas en torno a la superficie donde se dan los datos de Cauchy.

Sin embargo, en algunos casos, como por ejemplo en el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas $1 - d$, la solución está globalmente definida.

El objeto de esta sección es enfatizar que, en general, no puede garantizarse que la solución sea global.

Ya en el marco de la teoría de EDO encontramos ejemplos que ilustran claramente este hecho.

Consideramos por ejemplo la ecuación diferencial lineal:

$$\begin{cases} x' = x, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8.1}$$

En este caso la solución es global y viene dada por la expresión

$$x(t) = x_0 e^t. \tag{8.2}$$

Resulta pues evidente que se trata de una función analítica globalmente definida.

Consideremos ahora la ecuación no lineal:

$$
\begin{cases} x' = x^3, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8.3}
$$

La solución también puede obtenerse de forma explícita en este caso. En efecto, la ecuación puede reescribirse como

$$x'/x^3 = 1.$$

Integrando en la variable temporal obtenemos

$$\left.\frac{-1}{2x^2(t)}\right|_0^t = t.$$

Es decir

$$x(t) = \left[x_0^{-2} - 2t\right]^{-1/2} = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2tx_0}}. \tag{8.4}$$

La solución obtenida es analítica pero tiene carácter local puesto que $x(t) \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow t_*$, el tiempo máximo de existencia de la solución que viene dada por:

$$t_* = \frac{1}{2x_0^2}. \tag{8.5}$$

Se trata de un fenómeno de *explosión en tiempo finito*.

En realidad, salvo la solución trivial $x \equiv 0$ que corresponde al dato inicial $x_0 = 0$, todas las soluciones explotan en tiempo finito t_*. De la expresión explícita de t_* se observa también que, a medida que el módulo $\mid x_0 \mid$ del dato inicial aumenta el tiempo de existencia de la solución disminuye. Por el contrario, a medida que $\mid x_0 \mid$ tiende a cero el tiempo de existencia aumenta y tiende a infinito.

Este ejemplo muestra con claridad que la restricción que el enunciado del Teorema de C-K impone a las soluciones de ser locales no es meramente técnica sino que obedece a que, en algunas ocasiones, las soluciones no están globalmente definidas.

De este ejemplo se podría sin embargo pensar que el único obstáculo para que las soluciones estén globalmente definidas es que la ecuación en cuestión sea no-lineal. Esto es así en el marco de las EDO pero no en el de las EDP donde también pueden aparecer otro tipo de restricciones, de carácter más geométrico.

Para convencernos de eso consideremos la ecuación de Laplace en dos dimensiones espaciales

$$\Delta u = u_{xx} + y_{yy} = 0 \tag{8.6}$$

con datos de Cauchy sobre la circunferencia unidad

$$\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}. \tag{8.7}$$

En este caso el problema de Cauchy puede escribirse del siguiente modo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^2 \\ u\Big|_{\Gamma} = f \\ xu_x + yu_y\Big|_{\Gamma} = g. \end{cases} \tag{8.8}$$

Conviene señalar que, en cada punto de Γ, el vector (x, y) apunta en la dirección normal. Por tanto el valor de u y de $xu_x + yu_y$ sobre Γ proporcionan datos de Cauchy completos.

Teniendo en cuenta que, tal y como vimos en la sección anterior, el operador de Laplace no posee ninguna curva característica, se deduce que el Teorema de C-K es aplicable en este caso. Obtenemos así una solución analítica única local en un entorno de la curva Γ para cada par de datos iniciales analíticos f y g.

Cabe ahora preguntarse cuando esta solución está globalmente definida en el interior de la esfera $|x| \leq 1$. Para que esto ocurra es imprescindible que los datos de Cauchy f y g estén correlados. En otras palabras, para cada dato f sólo existe un dato g para el que la solución está blobalmente definida en la bola.

Para comprobar este hecho basta observar que la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en} \quad |x| \leq 1 \\ u\Big|_{\Gamma} = f, \end{cases} \tag{8.9}$$

es única. Este hecho puede probarse tanto por el principio del máximo como por el método de la energía. Hagamos la verificación por este último método. Si el problema posee dos soluciones distintas su diferencia v satisface

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 & \text{en} \quad |x| \leq 1 \\ v\Big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{8.10}$$

Multiplicando en la ecuación por v, e integrando por partes mediante la fórmula de Green obtenemos que

$$\int_{|x|\leq 1} |\nabla v|^2 dx = 0.$$

Esto implica que v ha de ser constante. Como se anula en el borde de la bola, ha de ser necesariamente nula, lo cual garantiza la unicidad.[4]

El ejemplo que acabamos de desarrollar demuestra que, lejos de tratarse de un hecho raro, la ausencia de soluciones globales para el problema de Cauchy ocurre en el ejemplo más importante en la teoría de EDP: la ecuación de Laplace.

[4]Otra prueba alternativa está basada en el *principio del máximo*. En efecto, si $\Delta v \geq 0$ su valor máximo se alcanza en el borde de modo que $v \leq 0$. Como $\Delta v = 0$, aplicando el mismo argumento a $-v$ se deduciría que $v \leq 0$. De este modo se concluiría que $v \equiv 0$.

9 Unicidad de soluciones

En las secciones anteriores hemos construido soluciones para diversas ecuaciones. El Teorema de C-K garantiza que estas son únicas en el marco de problemas de Cauchy con datos y coeficientes anallíticos y siempre que la superficie donde se dan los datos sea analítica y no característica.

Sin embargo, tal y como hemos tenido oportunidad de comprobar, el resultado de unicidad que el Teorema de C-K proporciona no siempre es de aplicación por, al menos, dos razones:

- Hay problemas importantes, como por ejemplo el problema de valores iniciales para la ecuación del calor, que no es un problema de Cauchy y además los datos están dados sobre una hipersuperficie ($t = 0$ en este caso) característica.
- Frecuentemente los datos del problema no son analíticos.

  Este era el caso por ejemplo en la ecuación del calor donde se observaba que para un dato inicial en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se obtenía una solución en la clase $BC\left([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^n)\right)$.

Conviene pues desarrollar herramientas adicionales que permitan abordar el problema de la unicidad de manera más sistemática. Aquí analizaremos dos de ellas:

- El Teorema de Holmgren.
- El método de dualidad.

9.1 El Teorema de Holmgren

El Teorema de Holmgren es válido en el contexto del Teorema de C-K siendo un corolario de este último. Su enunciado es el siguiente:

Teorema de Holmgren

En el marco del Teorema de C-K, es decir, para ecuaciones con coeficientes y datos analíticos sobre una superficie analítica y no característica la solución proporcionada por el Teorema de C-K es la única no sólo en la clase de funciones analíticas sino que es única en toda la clase de funciones localmente integrables.

La importancia del Teorema de Holmgren radica en que, para problemas de Cauchy en los que el Teorema de C-K es aplicable, no puede existir otra solución que no sea la función analítica que C-K proporciona.

Teorema de C-K puede también aplicarse incluso cuando los datos del problema no son analíticos. Consideremos por ejemplo el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n \\ u = f & \text{en} \quad \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{en} \quad \Gamma \end{cases} \tag{9.1}$$

donde Γ es una hipersuperficie analítica de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$.

Como el operador de Laplace no posee hipersuperficies características, el problema (9.1) entra en el marco del Teorema de C-K.

Supongamos ahora que, por ejemplo, f y g son funciones continuas. En estas condiciones el Teorema de C-K no se aplica puesto que, para hacerlo, se necesitan datos analíticos. Ahora bien, a pesar de ello, el Teorema de Holmgren garantiza la unicidad de la solución de (9.1).

En efecto, suponiendo que (9.1) posee dos soluciones u_1 y u_2 introducimos $v = u_1 - u_2$. Entonces v es solución de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n \\ v = \partial v/\partial \nu = 0 & \text{en} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{9.2}$$

Los datos en el sistema (9.2) son analíticos. El Teorema de C-K se aplica y deducimos que (9.2) posee una única solución que no puede ser otra que $v \equiv 0$. Por tanto $u_1 \equiv u_2$.

Vemos pues que el Teorema de Holmgren garantiza la unicidad de las soluciones de (9.1). Conviene sin embargo observar que el problema de la existencia persiste pues, si bien cuando f y g son analíticas el Teorema de C-K se aplica, esto no ocurre cuando f y g son, por ejemplo, meramente continuas.

En el caso de operadores lineales con coeficientes constantes

$$\mathcal{P}(D)u = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha D^\alpha u \tag{9.3}$$

la aplicación del Teorema de Holmgren proporciona el siguiente resultado.

Corolario. *Sea $u = u(x)$ una solución de*

$$\mathcal{P}(D)u = 0 \ \textit{en} \ \mathbb{R}^n \tag{9.4}$$

y supongamos que u se anula en un abierto no vacío ω de $\mathbb{R}^n$.

Entonces, u también se anula en un conjunto más grande $\widetilde{\omega}$, la envolvente característica de ω, que se define del modo siguiente: $\widetilde{\omega}$ es el abierto de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que todo hiperplano característico que interseque $\widetilde{\omega}$ también ha de intersecar a ω.

Veamos los resultados que arroja la aplicación de este Corolario en los tres modelos más importantes.

• **La ecuación de Laplace**

Supongamos que $u = u(x)$ es una solución de

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{9.5}$$

Supongamos además que $u = 0$ en ω, un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

En este caso se deduce inmediatamente que $u \equiv 0$. Esto es así puesto que $\widetilde{\omega} = \mathbb{R}^n$, lo cual ocurre porque Δ no tiene hiperplanos característicos.

Conviene también señalar que el Teorema de Holmgren es de aplicación local de modo que si la ecuación $\Delta u = 0$ se verifica en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y $u = 0$ en un subconjunto abierto no vacío ω de Ω, entonces $u \equiv 0$ en todo Ω.

• La ecuación del calor

Supongamos ahora que $u = u(x,t)$ es solución de la ecuación del calor

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n,\ 0 < t < T \tag{9.6}$$

y que

$$u = 0 \text{ en } \omega = \Theta \times (0,T) \tag{9.7}$$

donde Θ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Entonces, como consecuencia del Teorema de Holmgren tenemos que

$$u = 0 \text{ en } \widetilde{\omega} = \mathbb{R}^n \times (0,T). \tag{9.8}$$

Al cilindro $\widetilde{\omega} = \mathbb{R}^n \times (0,T)$ se le denomina la componente horizontal de $\omega = \theta \times (0,T)$.

Esto es así pues todos los hiperplanos característicos de la ecuación del calor son de la forma $t = \text{cte}$. Es pues evidente que $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ es el conjunto más grande con la propiedad de que todo hiperplano característico que lo corta, interseque también al subconjunto $\omega \times (0,T)$.

Vemos por lo tanto que, tanto en la ecuación de Laplace como del calor el conjunto de ceros de la solución se propaga a velocidad infinita en la variable espacial.

• La ecuación de ondas

Supongamos ahora que

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t \tag{9.9}$$

y que

$$u = 0 \text{ en } \omega = \Theta \times (-T,T). \tag{9.10}$$

En este caso, como consecuencia del Teorema de Holmgren tenemos que

$$u = 0 \text{ en } \tilde{\omega} \tag{9.11}$$

donde

$$\tilde{\omega} = \bigcup_{0 \leqslant R \leqslant T} \Theta_R \times (-T+R,\, T-R) \tag{9.12}$$

donde θ_R es un entorno en $\mathbb{R}^n_x$ de tadio R de θ.

En el caso de una variable espacial el resultado es particularmente sencillo pues garantiza que si

$$u = 0 \text{ en } (a,\, b) \times (-T,\, T)$$

entonces

$$u = 0 \text{ en } \bigcup_{0 \leqslant R \leqslant T} \left[(a-R,\, b+R) \times (-T+R,\, T-R)\right].$$

Análogamente,
$$u = 0 \text{ en } \bigcup_{0\leqslant\sigma\leqslant(b-a)/2} [(a+\sigma,\, b-\sigma)\times\{T+\sigma\}]$$
y
$$u = 0 \text{ en } \bigcup_{0\leqslant\sigma\leqslant(b-a)/2} [(a+\sigma,\, b-\sigma)\times\{-T-\sigma\}]\,.$$
En esta construcción se observa que el conjunto de ceros se propaga con velocidad uno, de acuerdo con las propiedades básicas de la ecuación de ondas considerada.

El resultado obtenido es óptimo tal y como se confirma al estudiar el cono de influencia y las regiones de dependencia en la ecuación de ondas.

9.2 Dualidad

A pesar de la versatilidad del Teorema de Holmgren, hay una situación en la que su aplicación es imposible. Se trata del caso en que el problema considerado es característico.

Esta es precisamente la situación en uno de los problemas más relevantes: El problema de valores iniciales para la ecuación del calor:

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{9.13}$$

En secciones anteriores hemos visto que si $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, el problema admite una solución de la forma

$$u(t) = \mathcal{G}(t) * f, \tag{9.14}$$

siendo $\mathcal{G}$ el núcleo de Gauss y que pertenece a la clase $u\in BC\left([0,\infty);\, L^2(\mathbb{R}^n)\right)$.

Habíamos asimismo comprobado (esto puede hacerse aplicando la desigualdad de Young para la convolución o el método de la energía) que

$$\| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\ \forall t>0. \tag{9.15}$$

Se nos plantea pues el problema de la unicidad. Como el hiperplano $\{t=0\}$ en el que el dato inicial está dado es característico para la ecuación del calor, el Teorema de Holmgren no se puede aplicar.

En este caso el método de dualidad proporciona la solución de manera sencilla.

Supopngamos que (9.13) admite dos soluciones u_1 y u_2 en la clase $BC\left([0,\infty);\, L^2(\mathbb{R}^n)\right)$. Entonces $v = u_1 - u_2 \in BC\left([0,\infty);\, L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ es solución de

$$\left\{\begin{array}{lll} v_t - \Delta v = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ v(0) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{9.16}$$

El problema se reduce a comprobar que $v \equiv 0$. En otras palabras, dado $T > 0$ arbitrario se trata de ver que $v(T) \equiv 0$.

Consideramos ahora el problema adjunto

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\varphi_t - \Delta\varphi = v & \text{en} & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \varphi(T) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{9.17}$$

A pesar de que hemos combinado el signo de la derivada temporal de la ecuación del calor que interviene en (9.17), en la medida en que los datos se dan en el instante final T, la solución φ puede ser construida como para el problema de valores iniciales en la clásica ecuación del calor.

En efecto, si hacemos el cambio de variables

$$\psi(x,t) = \varphi(x,\, T-t), \tag{9.18}$$

observamos que φ es solución de (9.17) si y sólo si ψ es solución de

$$\left\{ \begin{array}{lll} \psi_t - \Delta\psi = v(T-t) & \text{en} & \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \psi(0) = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{9.19}$$

Sabemos que (9.19) admite una solución de la forma

$$\psi(t) = \int_0^t \mathcal{G}(t-s) * v(T-s)ds. \tag{9.20}$$

Deshaciendo el cambio obtenemos que

$$\varphi(t) = \psi(T-t) = \int_0^{T-t} \mathcal{G}(T-t-s) * v(T-s)ds = \int_t^T \mathcal{G}(\sigma - t) * v(\sigma)d\sigma. \tag{9.21}$$

Tenemos además la estimación

$$\| \varphi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| v \|_{L^1(0,T;\, L^2(\mathbb{R}^n))},\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9.22}$$

Multiplicando en (9.17) por v e integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} v^2 dxdt &= \int_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} (-\varphi_t - \Delta\varphi) v\, dxdt \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi v dx \Big|_0^T + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(v_t - \Delta v) dxdt. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Es fácil ver que todos y cada uno de los términos a la derecha de la identidad (9.13) se anulan. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0) v(0) dx = 0$$

puesto que el dato inicial de v se anula. El hecho de que el valor de φ en $t = T$ se anula implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(T)v(T)dx = 0.$$

Por último, como v satisface la ecuación del calor vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} \varphi(v_t - \Delta v)dxdt = 0.$$

Concluimos por tanto que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times (0,T)} v^2 dxdt = 0, \tag{9.24}$$

lo cual garantiza que $v \equiv 0$ y da el resultado de unicidad buscado.

Vemos pues que el método de dualidad funciona proporcionando la solución en problemas característicos. Esencialmente, el método de dualidad funciona cada vez que disponemos de un método que permite construir soluciones con estimaciones adecuadas. Conviene sin embargo ser cautos en el caso en que el problema considerado es no-lineal. Para comprobarlo, consideramos el caso más sencillo de la EDO:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{9.25}$$

Supongamos que (9.25) admite dos soluciones x e y y definamos $z = x - y$. Entonces, z satisface

$$\begin{cases} z' = f(x) - f(y) = a(t)z, & t > 0 \\ z(0) = 0, \end{cases} \tag{9.26}$$

donde

$$a(t) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}. \tag{9.27}$$

Es ahora muy fácil aplicar el método de la dualidad para deducir que, cuando f es Lipschitz, la solución es única. En efecto, si f es Lipschitz con constante de Lipschitz $L > 0$, tenemos

$$| a(t) | = \left| \frac{f(x(t)) - f(y(t))}{x(t) - y(t)} \right| \leqslant L. \tag{9.28}$$

Por tanto, el potencial $a = a(t)$ en (9.26) está acotado.

Consideramos ahora el problema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi' = a(t)\varphi + z, & 0 < t < T \\ \varphi(T) = 0. \end{cases} \tag{9.29}$$

La solución φ de (9.29) existe y se puede construir por el método de la variación de las constantes.

Multiplicando en (9.29) por z e integrando por partes en el intervalo $0 < t < T$ deducimos que $z \equiv 0$. Es decir, se obtiene la unicidad en (9.25).

¿Por qué el método no se aplica cuando f deja de ser Lipschitz?

En efecto, cuando f deja de ser Lipschitz hay ejemplos claros de no unicidad. El más sencillo es el caso en que $f(x) = \sqrt{|\, x\,|}$. Obviamente f no es Lipschitz en $x = 0$ y el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|\, x\,|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{9.30}$$

admite al menos dos soluciones:

$$x \equiv 0 \tag{9.31}$$

y

$$y = t^2/4. \tag{9.32}$$

El método de dualidad no puede entonces aplicarse pues el potencial $a = a(t)$ correspondiente es singular

$$a(t) = \frac{\sqrt{|\, x\,|} - \sqrt{|\, y\,|}}{x - y} = \frac{\sqrt{|\, y\,|}}{y} = (\sqrt{y})^{-1} = (t/2)^{-1} = \frac{2}{t}. \tag{9.33}$$

La ecuación adjunta es entonces

$$\begin{cases} -\varphi' = \dfrac{2\varphi}{t} + z, \quad 0 < t < T \\ \varphi(T) = 0. \end{cases} \tag{9.34}$$

Se puede incluso comprobar que (9.34) admite una única solución que se puede escribir de manera explícita por el método de la variación de las constantes. Pero la solución φ obtenida es singular en $t = 0$, de modo que el método de dualidad que precisa de la integración por partes en el intervalo $(0, T)$ no se puede aplicar en este caso.

9.3 La solución de Tychonoff

Acabamos de probar mediante el método de dualidad que el problema de valores iniciales para la ecuación del calor tiene una solución única. Sin embargo Tychonoff contruyó una solución de la ecuación del calor que parece contradecir este hecho.

En efecto, Tychonoff construyó una función $u = u(x, t)$ de clase C^∞ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ tal que

$$u_t - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{9.35}$$

y de modo que

$$u(x, t) \to 0,\ t \to 0^+,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9.36}$$

Esto entra en aparente contradicción con el resultado de unicidad probado mediante el método de dualidad que garantiza que si el dato inicial es nulo, la única solución del problema de valores iniciales es la nula.

Un análisis un poco más cuidadoso de la solución de Tychonoff y del resultado de unicidad probado permite deshacer esta aparente paradoja.

La solución de Tychonoff se construye de la siguiente manera (véase el capítulo 7 del libro de F. John [5] para más detalles).

Consideramos la ecuación del calor unidimensional

$$u_t - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{9.37}$$

con datos de Cauchy en el eje temporal:

$$u(0,t) = g(t),\ u_x(0,t) = 0,\ t > 0. \tag{9.38}$$

Buscamos una solución de (9.37)-(9.38) desarrolla en serie de potencias de la forma

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j. \tag{9.39}$$

Introduciendo la expresión (9.39) en la ecuación del calor, igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x y usando los datos de Cauchy (9.38) obtenemos que

$$g_0 = g,\ g_1 = 0,\ g_j' = (j+2)(j+1) g_{j+2}. \tag{9.40}$$

Obtenemos por tanto la solución formal

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}. \tag{9.41}$$

Elegimos ahora el dato de Cauchy

$$\begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}), & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{9.42}$$

con $\alpha > 1$. Se trata de una función C^∞ pero no es analítica. Además se puede comprobar que

$$\left| g^{(k)}(t) \right| \leqslant \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha} \right), \tag{9.43}$$

para un cierto $\theta = \theta(\alpha) > 0$.

Esta propiedad basta para garantizar la convergencia de la serie de potencias (9.41). En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\ x\ |^{2k}}{k! (\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha} \right) = \\ &= \exp\left[\frac{1}{t} \left(\frac{|\ x\ |^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha} \right) \right] = U(x,t). \end{aligned} \tag{9.44}$$

De la estimación (9.44) deducimos que, para $t > 0$, $u << U$, en la relación de orden de las funciones analíticas.

De este modo vemos que para todo $t > 0$, (9.41) define una función analítica en x. Es también fácil comprobar por argumentos semejantes que es de clase C^∞ en $t > 0$.

Por construcción, se trata de una solución de la ecuación del calor (9.37). Por otra parte, de la cota (9.44) deducimos con facilidad que

$$u(x,t) \to 0 \text{ cuando } t \to 0^+. \tag{9.45}$$

Cabe entonces preguntarse el modo en que la existencia de la solución de Tychonoff es compatible con el resultado de unicidad probado mediante el método de dualidad.

Un análisis cuidadoso del desarrollo realizado mediante aquél método muestra que el resultado de unicidad que aquél arroja es en la clase de soluciones $BC\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\right)$. Esta clase puede ser ligeramente ampliada pero no de manera arbitraria puesto que en la aplicación del método de dualidad hemos de resolver la ecuación (9.17) y después integrar por partes tras multiplicar por v.

Ninguna de estas operaciones puede realizarse en el marco de la solución de Tychonoff. En efecto, la solución u que Tychonoff proporciona crece muy rápidamente cuando $\mid x \mid \to \infty$. Esto es particularmente claro en la cota superior $U(x,t)$ en la que se ve fácilmente que, para cada $t > 0$ fijo, cuando $\mid x \mid \to \infty$ diverge de manera exponencial.

La solución de Tychonoff está pues fuera de la clase donde el método de la dualidad se puede aplicar.

Se observa pues un matiz importante entre el resultado que el Teorema de Holmgren proporciona y el que nos da la dualidad. El Teorema de Holmgren, cuando se puede aplicar, es decir en los problemas no característicos, garantiza que sólo puede haber una solución, sea cual sea la clase de funciones consideradas. Sin embargo, el método de la dualidad proporciona la unicidad en una clase de soluciones dada y no excluye la existencia de otras como ocurre con la solución de Tychonoff.

10 La transformada de Fourier

Una de las herramientas más útiles en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) es la transformada de Fourier.

Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformación de Fourier del modo siguiente:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10.1}$$

Conviene señalar que $\hat{f}$ está bien definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ puesto $e^{ix\cdot\xi} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esto es efectivamente cierto puesto que

$$\left|e^{-ix\cdot\xi}f(x)\right| =| f(x) |\in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{10.2}$$

De esta propiedad se deduce que

$$\| \hat{f} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \tag{10.3}$$

Por otra parte, el Teorema de la Convergencia Dominada (TCD) permite ver que $\hat{f}$ es también una función continua. Por tanto, $\hat{f} \in BC(\mathbb{R}^n)$.

La transformada de Fourier tiene varias propiedades fundamentales que la hacen no sólamente una herramienta muy útil en el contexto de las EDP sino también en muchos otros ámbitos de las Matemáticas y de las otras Ciencias y Tecnologías.

Una de ellas está relacionada con el comportamiento de la transformada de Fourier en relación a los operadores de derivación. Tenemos:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \frac{i\xi_j}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx = i\xi_j\hat{f}(\xi). \tag{10.4}$$

Gracias a esta propiedad, las EDP lineales con coeficientes constantes se reducen a ecuaciones algebraicas lineales en el espacio de Fourier. En efecto, consideremos por ejemplo la ecuación de Laplace

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{10.5}$$

Tomando la transformada de Fourier obtenemos

$$| \xi |^2 \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10.6}$$

En la obtención de (10.6) hemos utilizado de manera esencial que

$$\widehat{-\Delta u} = -\widehat{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}} = -\sum_{i=1}^n \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}} = -\sum_{i=1}^n (i\xi_i)^2\hat{u} =| \xi |^2 \hat{u}.$$

De (10.6) podemos obtener de manera inmediata una expresión para la transformada de Fourier $\hat{u}$ de la solución u:

$$\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\Big/ | \xi |^2 . \tag{10.7}$$

Pero, para obtener la solución necesitamos invertir de la transformada de Fourier.

La transformada inversa de Fourier se define del modo siguiente:

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}f(\xi)d\xi. \tag{10.8}$$

Nuevamente, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\check{f}$ está bien definida y es una función de $BC(\mathbb{R}^n)$.

La Gaussiana es un ejemplo particularmente importante en el que la transformada de Fourier es fácil de calcular explícitamente.

Tenemos

$$\widehat{e^{-t|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{1}{2t}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2} \Big/ 4t. \tag{10.9}$$

En efecto,

$$\widehat{e^{-t|x|^2}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} e^{-t|x|^2} dx = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixj\cdot\xi_j} e^{-t|x_j|^2} dx_j. \tag{10.10}$$

Para comprobar (10.9) basta calcular la siguiente integral en una sola variable real:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} e^{-tx^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-t(x+i\xi/2t)^2} e^{-\xi^2/4t} dx = e^{-\xi^2/4t} \int_{\Gamma} e^{-tz^2} dz \tag{10.11}$$

donde Γ es el contorno $\mathrm{Im}\,(z) = \xi/2t$ del plano complejo. Deformando los contornos la integral, por el teorema de los residuos, puede reducirse al cálculo de la misma sobre el eje real:

$$\int_{\Gamma} e^{-tz^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx = \sqrt{\pi/t}. \tag{10.12}$$

De (10.11) y (10.12) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} e^{-tx^2} dx = e^{-\xi^2/4t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{1/2}, \tag{10.13}$$

lo cual, combinado con (10.10), proporciona (10.9).

En (10.9) se observa una de las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier. En efecto, dada $f \in \mathbb{R}^n$, si definimos la función

$$f_t(x) = f(t_x) \tag{10.14}$$

tenemos

$$\hat{f}_t(\xi) = \frac{1}{t^n} \hat{f}(\xi/t). \tag{10.15}$$

Para comprobar (10.15) basta observar que

$$\hat{f}_t(\xi) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f_t(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(tx) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} t^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi t} f(y) dy.$$

La relación (10.15) expresa el comportamiento de la transformada de Fourier con respecto a cambios de escala.

La identidad (10.9) sobre la transformada de Fourier de la Gaussiana es muy útil. En particular proporciona la solución fundamental de la ecuación del calor

$$\mathcal{G}(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(- \mid x \mid^2 \Big/ 4t\right). \tag{10.16}$$

En efecto, recordemos que $\mathcal{G}$ es la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{G}_t - \Delta\mathcal{G} = 0 & \text{en} & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \mathcal{G}(x,0) = \delta_0(x) & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{10.17}$$

Tomando la transformada de Fourier en la primera ecuación de (10.17) obtenemos

$$\hat{\mathcal{G}}_t + \mid \xi \mid^2 \hat{\mathcal{G}} = 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n,\, t > 0 \tag{10.18}$$

y por tanto

$$\hat{\mathcal{G}}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t}\hat{\mathcal{G}}(\xi,0). \tag{10.19}$$

Conviene observar que en (10.18) sólo se toma la transformada de Fourier en la variable espacial, lo que transforma la ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria con parámetro ξ.

Por otra parte, en virtud del dato inicial de (10.17) tenemos

$$\hat{\mathcal{G}}(\xi,0) = \hat{\delta}_0(\xi). \tag{10.20}$$

Por otra parte

$$\hat{\delta}_0 \equiv 1\Big/(2\pi)^{n/2}. \tag{10.21}$$

Son varias las maneras de justificar la identidad (10.21). Una primera es simplemente aplicar la definición de la transformada de Fourier, teniendo en cuenta que δ_0 es una medida. Se obtiene

$$\hat{\delta}_0(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\hat{\delta}_0(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Otra posibilidad es observar que la familia

$$\left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2} e^{-t|x|^2}$$

es una aproximación de la identidad cuando $t \to \infty$ de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2} e^{-t|x|^2}\varphi(x)dx \;\to\; \varphi(0)$$

para todo $\varphi \in BC(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\hat{\delta}_0(\xi) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2}\widehat{e^{-t|x|^2}}(\xi) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|\xi|^2/4t} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Combinando (10.19) y (10.21) obtenemos

$$\hat{\mathcal{G}}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|\xi|^2 t}. \tag{10.22}$$

Basta por último aplicar la transformada inversa de Fourier para obtener $\mathcal{G}(x,t)$ a partir de su transformada de Fourier (10.22). Obtenemos entonces

$$\mathcal{G}(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(- \mid x \mid^2 \Big/ 4t\right). \tag{10.23}$$

La fórmula (10.23) se obtiene fácilmente a partir de (10.9) teniendo que, en virtud de la definición de $\hat{\cdot}$ y $\check{\cdot}$ se tiene

$$\hat{f}(\xi) = \check{f}(-\xi). \tag{10.24}$$

Sigamos ahora estudiando las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier la *identidad de Plancherel* garantiza que

$$\parallel f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \parallel \hat{f} \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{10.25}$$

para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Antes de probar (10.25) observamos que esta identidad garantiza que la transformada de Fourier define una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Además, en virtud de (10.25), la transformada de Fourier puede extenderse por densidad a una isometría definida en todo el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Con el objeto de probar (10.25) observamos en primer lugar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)w(x)dx, \tag{10.26}$$

para todo$v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Conviene en primer lugar observar que ambas integrales están bien definidas puesto que como $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo que $v\hat{w}$, $\hat{v}w \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

La identidad (10.26) es fácil de comprobar. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\hat{w}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot y}w(y)dy\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}v(x)w(y)dx\,dy$$

que coincide con la expresión de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)w(x)dx$.

Aplicando esta identidad con $v(x) = e^{-\varepsilon|x|^2}$ y usando la expresión de $\hat{v}$ antes calculada obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y)e^{-\varepsilon|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)e^{-|x|^2/4\varepsilon}dx. \tag{10.27}$$

Dada $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos $v(x) := \bar{u}(-x)$ y $w = u * v$ (que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$). Tenemos

$$\hat{w} = \widehat{u * v} = (2\pi)^{u/2}\hat{u}\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{10.28}$$

Esta es otra de las propiedades importantes de la transformada de Fourier: la transformada de Fourier de la convolución es, módulo una constante multiplicativa, igual al producto de las transformadas de Fourier.

En este caso, como $v(x) = \bar{u}(-x)$, tenemos

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \bar{u}(-x)dx = \bar{\hat{u}}(\xi) \tag{10.29}$$

y por tanto $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} \mid \hat{u}(\xi) \mid^2$.

Como w es continua tenemos también

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{n/2} w(0). \tag{10.30}$$

De la identidad (10.27) deducimos entonces que $\hat{w} = (2\pi)^{n/2} \mid \hat{u}(\xi) \mid^2$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir que $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Además

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mid \hat{u} \mid^2 d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(\xi) d\xi = w(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \mid u(x) \mid^2 dx,$$

lo cual concluye la prueba de la identidad de Plancherel (10.25).

Comprobamos ahora la fórmula (10.28) que pone en relación la convolución y la transformada de Fourier. Tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{w}(\xi) &= \widehat{u * v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} (u*v)(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x-y)v(y)dy\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i[(x-y)+y]\cdot\xi} u(x-y)v(y)dy\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} v(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\xi} u(x-y)dx = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).
\end{aligned}$$

Probemos algunas propiedades más de la transformada de Fourier. *La identidad de Parseval* garantiza que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi. \tag{10.31}$$

Para comprobarlo, dados u, v y $\alpha \in \mathbb{C}$, aplicamos la identidad de Plancherel a la función $u + \alpha v$ de modo que

$$\| u + \alpha v \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \hat{u} + \alpha\hat{v} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Expandiendo esta identidad tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\mid u \mid^2 + \mid \alpha \mid^2 + \bar{u}(\alpha v) + u(\bar{\alpha}\bar{v}) \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\bar{\hat{u}}(\alpha\hat{v}) + (\overline{\alpha\bar{\hat{v}}}) \right] d\xi.$$

Tomando sucesivamente $\alpha = 1$ y $\alpha = i$ en esta identidad obtenemos (10.31).

Comprobamos por último la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, es decir,

$$(\hat{f})^{\vee} = f. \tag{10.32}$$

Dado $z \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ consideramos la función $v_\varepsilon(x) = e^{ix\cdot z - \varepsilon|x|^2}$. Tenemos

$$\hat{v}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(y-z)-\varepsilon|x|^2} dx = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} e^{-|y-z|^2/4\varepsilon}. \tag{10.33}$$

En este punto hemos usado la fórmula (10.13) que identifica la transformada de Fourier de la Gaussiana.

De la fórmula (10.26) deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{iz\cdot\xi - \varepsilon|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{|x-z|^2}{4\varepsilon}} dx.$$

Ahora bien, la expresión de la derecha de esta identidad converge a $f(z)$ para casi todo $z \in \mathbb{R}^n$, mientras que la de la izquierda converge a $(\hat{f})^{\vee}(z)$. Esto concluye la prueba de la fórmula de inversión.

Volvamos ahora al problema de la resolución de la ecuación de Laplace (10.5) mediante la transformada de Fourier. Tal y como veíamos en (10.7),

$$\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \Big/ \mid \xi \mid^2,$$

y, por lo tanto, por la fórmula de inversión

$$u(x) = \left(\hat{f}(\xi) \Big/ \mid \xi \mid^2\right)^{\vee} (x). \tag{10.34}$$

Conviene sin embargo aplicar con cuidado la fórmula (10.34) puesto que el núcleo $\mid \xi \mid^2$ que aparece en el denominador se anula en $\xi = 0$.

La manera más natural de compensar esta singularidad es considerar en (10.5) segundos miembros de la forma

$$f(x) = \mathrm{div}(\vec{g}(x)) \tag{10.35}$$

donde $\vec{g} = (g_1, \ldots, \ldots, g_n)$ es un campo vectorial y div denota el operador de divergencia

$$\mathrm{div}(\vec{g}) = \sum_{i=1}^{n} \partial g_i \Big/ \partial x_i.$$

En este caso

$$\hat{f}(\xi) = \widehat{\mathrm{div}\, \vec{g}}(\xi) = i\xi \cdot \hat{\vec{g}}(\xi).$$

Obtenemos entonces

$$\hat{u}(\xi) = \frac{i\xi \cdot \hat{\vec{g}}(\xi)}{\mid \xi \mid^2},$$

y

$$\xi \hat{u}(\xi) = \frac{i\xi \left(\xi \cdot \hat{\vec{g}}(\xi)\right)}{\mid \xi \mid^2}.$$

De esta identidad vemos que

$$\| \xi \hat{u}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| \vec{g} \|_{(L^2(\mathbb{R}^n))^n} .$$

Por otra parte, combinando la fórmula de inversión (10.4) obtenemos

$$(\xi \hat{u})^{\vee} = -i \nabla u(x).$$

De este modo se prueba que, cuando $f = \mathrm{div}(\vec{g})$ con $\vec{g} \in \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^n$, la ecuación de Laplace (10.5) admite una solución $u = u(x)$ tal que $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

El mismo análisis permite resolver la ecuación de Laplace con potencial

$$-\Delta u + u = f \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{10.36}$$

En este caso se obtiene

$$(1+ \mid \xi \mid^2) \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \tag{10.37}$$

y, por tanto,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+ \mid \xi \mid^2}. \tag{10.38}$$

Por consiguiente,

$$u(x) = \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{1+ \mid \xi \mid^2} \right)^{\vee} (x). \tag{10.39}$$

En esta ocasión no se plantea el problema de la singularidad del polinomio característico de la EDP.

Es en particular evidente que

$$\| u \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \| \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\| \frac{\hat{f}}{1+ \mid \xi \mid^2} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| \hat{f} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Pero se puede obtener una estimación aún más fina:

$$\begin{aligned} \| \nabla u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \| \widehat{\nabla u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \| \mid \xi \mid \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \| \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \sqrt{1+ \mid \xi \mid^2} \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leqslant \| (1+ \mid \xi \mid^2) \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \hat{f} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned} \tag{10.40}$$

Esta propiedad puede también obtenerse con facilidad mediante el método de energía. En efecto, multiplicando la ecuación (10.36) por u e integrando en $\mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u + u) u dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\mid \nabla u \mid^2 + u^2 \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} f u dx \leqslant \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{10.41}$$

De esta desigualdad se obtiene, en particular, la estimación (10.40).

Otra de las propiedades más clásicas de la Transformada de Fourier es la que se obtiene en relación al operador de traslación. En efecto, dada una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos una traslación de la misma de amplitud $a \in \mathbb{R}^n$:

$$f_a(x) = f(x+a). \tag{10.42}$$

La transformada de Fourier de la trasladada f_a viene dada por

$$\hat{f}_a(\xi) = e^{ia\cdot\xi}\hat{f}(\xi). \tag{10.43}$$

En efecto, mediante un simple cambio de variables se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x+a)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-a)\cdot\xi} f(y)dy = e^{ia\xi}\hat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{10.44}$$

De manera análoga, se comprueba que

$$\widehat{e^{ia\cdot} f}(\xi) = \hat{f}_{-a}(\xi). \tag{10.45}$$

Para la Transformada Inversa de Fourier se obtienen fórmulas semejantes:

$$\check{f}_a(x) = e^{-ia\cdot x}\check{f}(x) \tag{10.46}$$

y

$$\left(e^{ia\cdot\xi} f\right)^{\vee}(x) = \check{f}_a(x). \tag{10.47}$$

La transformada de Fourier permite también obtener la solución explícita de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{10.48}$$

Tal y como comprobamos anteriormente, las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$u = f(x-t). \tag{10.49}$$

Veamos como la expresión (10.49) se puede obtener empleando la Transformada de Fourier. Aplicándola en la variable x, i.e. definiendo

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2})}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} u(x,t)dx, \tag{10.50}$$

obtenemos que $\hat{u}$ ha de satisfacer

$$\hat{u}_t + i\xi\hat{u} + 0,\ \xi \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{10.51}$$

Vemos por tanto cómo la Transformación de Fourier conduce la EDP (10.48) en una EDO (10.51) dependiente del parámetro $\xi \in \mathbb{R}$.

Es fácil obtener la solución de (10.51) explícitamente. Tenemos

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-i\xi t}\hat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{10.52}$$

siendo $f = f(x)$ el dato inicial de la solución.

Aplicamos ahora en (10.52) la Transformada Inversa de Fourier. Lo hacemos, obviamente, únicamente en la variable ξ. Obtenemos así

$$u(x, t) = \left(e^{-i\xi t}\hat{f}\right)^{\vee}(x) = f_{-t}(x) = f(x - t) \tag{10.53}$$

gracias a la propiedad (10.47).

Tal y como hemos indicando en la introducción de esta sección, las aplicaciones de la Transformada de Fourier son muy numerosas, no sólo en el ámbito de las EDP, sino también en el tratamiento de señales y de imágenes, por ejemplo.

Hay muchos aspectos de la utilidad de la Transformada de Fourier en EDP que no hemos abordado en esta sección. Entre ellas cabe mencionar *El Teorema de Malgrange-Erenphreis.* Se trata de uno de los resultados más clásicos e importantes en la teoría de EDP. Garantiza que todo operador en derivadas parciales lineal de coeficientes constantes

$$\mathcal{P}(\mathcal{D})u = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \mathcal{D}^\alpha u \tag{10.54}$$

admite una solución fundamental $E = E(x)$ tal que

$$\mathcal{P}(\mathcal{D})E = \delta_0. \tag{10.55}$$

En el libro de Folland [4] puede encontrarse una prueba de este resultado basada en la Transformada de Fourier. La dificultad de la misma es evidente. Aplicando la Transformada de Fourier en (10.55) se obtiene

$$\mathcal{P}(i\xi)\hat{E} = 1/(2\pi)^{n/2} \tag{10.56}$$

de donde se deduce que

$$\hat{E} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\mathcal{P}(i\xi)}. \tag{10.57}$$

Es sin embargo preciso analizar con cuidado el significado de la expresión (10.57) puesto que el Polinomio $\mathcal{P}$ en general tendrá un conjunto de ceros no trivial. Esto nos obliga a dar un sentido a la fórmula de inversión:

$$E(x) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\mathcal{P}(i\xi)}\right)^{\vee}(x).$$

11 La fórmula de variación de las constantes. Ecuaciones no homogéneas

En las secciones anteriores hemos visto cómo las soluciones fundamentales permiten resolver el problema de valores iniciales para las EDP con coeficientes constantes. Hemos visto asimismo que dichas soluciones fundamentales se pueden obtener mediante la Transformada de Fourier. La ecuación del calor es el ejemplo que hemos analizado en más detalle.

Pero en la práctica, los problemas que en la vida real se plantean y que son susceptibles de ser modelizados mediante EDP no sólo tienen como datos la configuración inicial del sistema sino también las fuentes o fuerzas que pueden modificar, perturbar o determinar su dinámica temporal.

Esto conduce a problemas no-homogéneos.

En el caso de la ecuación del calor el problema correspondiente es de la forma

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t - \Delta u = g(x,t) & \text{en} & \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{en} & \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{11.1}$$

En este sistema $f = f(x)$ describe la distribución inicial del calor mientras que $g = g(x,t)$ representa una fuente externa que varía en tiempo con una distribución desigual en espacio.

En esta sección veremos que, combinando el núcleo de Gauss y la clásica fórmula de variación de las constantes para EDO, se puede obtener una fórmula de representación explícita para la solución de (11.1).

Recordemos brevemente el método de variación de las constantes en el caso más simple de las EDO:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \\ x(0) = x_0. \end{array}\right. \tag{11.2}$$

En el caso más simple en que $b \equiv 0$ la solución explícita de (11.2) es:

$$x(t) = e^{-A(t)}x_0 \tag{11.3}$$

donde

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds. \tag{11.4}$$

Cuando $b \equiv 0$ buscamos una solución de la forma

$$x(t) = e^{-A(t)}y(t). \tag{11.5}$$

La función $y = y(t)$ ha de satisfacer

$$y'(t) = e^{A(t)}b(t),\ y(0) = x_0$$

de donde deducimos que

$$y(t) = \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds + x_0.$$

Por lo tanto

$$x(t) = e^{-A(t)} x_0 + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds = e^{-A(t)} x_0 + \int_0^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds. \tag{11.6}$$

En la fórmula (11.6) se observa que:

- La solución general del problema no-homogéneo (11.2) es la superposición (suma) de la solución general del problema homogéneo (11.3) y la función

$$z(t) = \int_0^t e^{-(A(t)-A(s))} b(s) ds. \tag{11.7}$$

- Esta función z de (11.7) es una solución particular del problema no-homogéneo

$$z' + a(t) z = b(t). \tag{11.8}$$

Se trata de aquella en la que $z(0) = 0$.

Los mismos principios son válidos para la resolución de (11.1).
En efecto, el principio de superposición permite escribir la solución de (11.1) como

$$u = v + w \tag{11.9}$$

donde

$$v(x,t) = [\mathcal{G}(\cdot, t) * f](x) \tag{11.10}$$

es la solución del problema homogéneo y w es solución de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = g & \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ w(x,0) = 0, & \text{en} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11.11}$$

Por otra parte la solución de (11.11) es de la forma

$$w(x,t) = \int_0^t [\mathcal{G}(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)](x) ds \tag{11.12}$$

es decir,

$$w(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n}^t \exp\left(- \frac{|\, x - y \,|^2}{4(t-s)} \right) g(y,s) dy\, ds. \tag{11.13}$$

En efecto, de (11.12) es fácil de comprobar que

$$w(x,0) \equiv 0. \tag{11.14}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= \int_0^t [\mathcal{G}_t(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)](x)ds + [\mathcal{G}(\cdot, 0) * g(\cdot, t)](x) = \\ &= g(x,t) + \int_0^t [\mathcal{G}_t(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)](x)ds \end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{G}(\cdot, 0) = \delta_0$. Además,

$$\Delta w(x,t) = \int_0^t \left[\Delta_x \mathcal{G}(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)\right](x)ds.$$

Utilizando que

$$\mathcal{G}_t - \Delta_x \mathcal{G} = 0$$

deducimos que w dado por (11.12) resuelve en efecto (11.10).

De este modo se comprueba que la solución general de la ecuación (11.1) es de la forma

$$u(x,t) = \left[\mathcal{G}(\cdot, t) * f(\cdot)\right](x) + \int_0^t \left[\mathcal{G}(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)\right](x)ds. \tag{11.15}$$

La fórmula (11.15) es semejante a la obtenida en (11.6) mediante el método de variación de las constantes. En efecto, en ambas expresiones, el primer término representa la solución del problema mientras que la segunda incorpora la contribución del segundo miembro.

Conviene por último observar que el segundo término de la expresión (11.15), correspondiente a la contribución del segundo miembro g, es una media temporal de expresiones de la forma $\mathcal{G}(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)$ que son en realidad las soluciones de la ecuación del calor en el instante $t-s$ que arrancan en el dato inicial $g(s)$. Vemos pues que la contribución de un segundo miembro en la ecuación es semejante a la del dato inicial promediada en tiempo.

Conviene analizar el sentido de la expresión (11.15). Gracias a la desigualdad de Young para la convolución es fácil comprobar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, como $\mathcal{G} \in L^\infty(0, \infty;\ L^1(\mathbb{R}^n))$, entonces

$$\int_0^t \mathcal{G}(\cdot, t-s) * g(\cdot, s)ds \in BC\left([0, \infty);\ L^p(\mathbb{R}^n)\right).$$

De este modo concluímos que:

> "Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(0, \infty;\ L^p(\mathbb{R}^n))$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la solución u de (11.1) representada por la fórmula de variación de las constantes (11.15) pertenece a la clase $BC\left([0, \infty);\ L^p(\mathbb{R}^n)\right)$".

En algunos casos el método de la energía permite obtener este tipo de estimación. En efecto, multiplicando en (11.1) por u e integrando por partes en $\mathbb{R}^n$ obtenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \mid u \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u \mid^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} gudx \tag{11.16}$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u(t) \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \parallel g(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \parallel u(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} \parallel u(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \parallel g(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Integrando en tiempo esta estimación de energía se deduce que

$$\parallel u(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \parallel f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \parallel g(s) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds, \tag{11.17}$$

lo cual confirma el resultado de regularidad antes mencionado cuando $p = 2$.

La fórmula (11.15) no es exclusiva de la ecuación del calor. En realidad es válida para cualquier EDP con coeficientes constantes, siempre y cuando $\mathcal{G}$ se sustituya por la solución fundamental correspondiente.

En particular, se puede aplicar con facilidad en la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = h(x,t),\ x \in \mathbb{R}, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{11.18}$$

En este caso la solución viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+t-s} h(y,s)dyds. \tag{11.19}$$

La primera parte de la expresión (11.19) en la que intervienen f y g es conocida. Se trata de la solución de la ecuación de ondas homogénea con datos iniciales f y g.

En la segunda parte se observa que h interviene como una integral doble. En particular, la función h se integra en la variable espacial, de manera semejante a como se hace con la velocidad inicial g.

Esto es así puesto que, en efecto, el efecto que la fuerza exterior h produce sobre la cuerda en deformación es semejante a un cambio de velocidad. Desde el punto de vista analítico ésto se puede comprobar fácilmente al escribir la ecuación de ondas como un sistema. Para ello introducimos la variable auxiliar $v = u_t$ que representa la velocidad de deformación. La ecuación (11.18) puede entonces escribirse del modo siguiente:

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = u_{xx} + h, \end{cases}$$

o, utilizando la notación matricial

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

en la siguiente forma abstracta,

$$U_t = AU + \binom{0}{h}.$$

Vemos de este modo que la fuerza externa h de (11.18) actúa en el sistema al nivel de la componente velocidad $v = u_t$.

12 La ecuación de transporte lineal

Las ecuaciones que modelizan fenómenos de propagación de ondas y vibraciones son típicamente Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) de orden dos. Sin embargo en todas ellas subyacen las ecuaciones de transporte de orden uno que analizamos en esta sección.

El modelo más sencillo es

$$u_t + u_x = 0. \tag{12.1}$$

Es fácil comprobar que $u = u(x,t)$ es solución de esta ecuación si y sólo si es constante a lo largo de las *líneas características*

$$x + t = \text{cte.} \tag{12.2}$$

De este modo deducimos que las soluciones de (12.1) son de la forma

$$u = f(x - t), \tag{12.3}$$

donde f es el perfil de la solución en el instante inicial $t = 0$, i.e.

$$u(x,0) = f(x). \tag{12.4}$$

La solución (12.3) es entonces una simple onda de transporte pura en la que el perfil f se transporta (avanza) en el eje real a velocidad constante uno.

Al invertir el sentido del tiempo (i.e. haciendo el cambio de variable $t \to -t$) la ecuación (12.1) se transforma en

$$u_t - u_x = 0 \tag{12.5}$$

cuyas soluciones son ahora de la forma

$$u = g(x + t), \tag{12.6}$$

tratándose de ondas viajeras que se propagan en dirección opuesta a velocidad uno.

Vemos por tanto que las soluciones de la ecuación de transporte pueden calcularse de manera explícita y que en ellas se observa un sencillo fenómeno de transporte lineal sin deformación.

Como decíamos, este ecuación de transporte de orden uno subyace en muchas de las ecuaciones de ondas que intervienen en la teoría de vibraciones. Así, por ejemplo, el operador de ondas $\partial_t^2 - \partial_x^2$ se puede descomponer en dos operadores de transporte

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x).$$

En el caso en que el transporte se produzca en un medio no homogéneo, la ecuación correspondiente adopta la forma:

$$u_t + c(x)u_x = 0. \tag{12.7}$$

En este caso, nuevamente, la solución es constante a lo largo de las características que son las soluciones de

$$x'(t) = c(x(t)), \quad t > 0; \quad x(0) = x_0. \tag{12.8}$$

En efecto, es fácil comprobar que si u es solución de (12.7) se tiene que $u(x(t), t)$ es independiente de t para cualquier curva característica.

En realidad, tal y como ocurría en el caso de los coeficientes constantes, esta propiedad permite definir la solución. En efecto, supondiendo que el coeficiente $c = c(x)$ es una función Lipschitz, para cada x_0 existe una única característica solución de (12.8). Además las características están globalemente definidas y no pueden cortarse por unicidad de la solución de la EDO (12.8). Por último, por cada punto del espacio tiempo (x_1, t_1) pasa una única característica. Para comprobarlo basta resolver la ecuación

$$x'(t) = c(x(t)),$$

con dato inicial $x(t_1) = x_1$ y observar que la característica solución de (12.8) pasa por (x_1, t_1) si el dato inicial x_0 coincide con el valor de esta solución en $t = 0$, i.e. $x(0)$.

De este modo vemos que la solución de la ecuación de transporte (12.7) está globalmente definida por su dato inicial $u(x, 0) = f(x)$.

13 La ecuación del calor

Como hemos mencionado en la Introducción la ecuación del calor es el prototipo de ecuación de evolución de tipo parabólico cuyas variantes están presentes de manera sistemática en todos los modelos matemáticos de la difusión y de la Mecánica de Fluidos. Se trata de un modelo fuertemente irreversible en tiempo en el que la información se propaga a velocidad infinita. Estas propiedades quedarán claramente de manifiesto a lo largo de esta sección en la que recordamos sus principales propiedades analíticas.

13.1 El problema de valores iniciales en $I\!R$

Consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{13.1}$$

Se trata evidentemente de una ecuación de orden dos lineal y con coeficientes constantes y por tanto susceptible de que se aplique el Teorema de C-K.

Conviene sin embargo obervar que en (13.1) sólo damos un dato de Cauchy: El valor de u, en $t = 0$. Tal y como observamos en la sección 7 esto es así puesto que la recta $t = 0$ sobre la que se dan los datos es característica. En efecto, la parte principal del operador diferencial involucrado en (13.1) es $-\partial_x^2$ y su símbolo $-\xi^2$, de modo que un vector (ξ, τ) es normal a una recta característica cuando $\xi = 0$, i.e. cuando es de la forma $(0, \pm 1)$. Esto significa que las rectas características de la ecuación del calor son las horizontales. La recta $t = 0$ que interviene en (13.1) lo es. Es por ello que sólo damos un dato de Cauchy y no dos como sería de esperar en una ecuación de orden dos. Vimos asimismo que el sistema estaría sobredeterminado si impusiésemos dos datos de Cauchy en $t = 0$ como corresponde a un sistema de orden dos. En efecto, como $u(x,0) = f(x)$, necesariamente $u_{xx}(x,0) = f''(x)$ y, por tanto, si u es solución de la ecuación del calor, como $u_t = u_{xx}$, necesariamente tendremos que $u_t(x,0) = f''(x)$. Es decir, si nos diesemos un dato de Cauchy adicional $u_t(x,0) = g(x)$ tendría que tenerse la condición de compatibilidad $g(x) = f''(x)$ para que la solución pudiese existir.

A pesar de que el problema de valores iniciales (13.1) no entra en el marco del Teorema de C-K cabe abordarlo a partir del método de Cauchy basado en el desarrollo de las soluciones en series de potencias.

Supongamos que el dato inicial $f = f(x)$ es una función analítica de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

y busquemos una solución analítica de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x^k.$$

Para que la ecuación del calor se satisfaga es necesario que

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(t) x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) u_k(t) x^{k-2} = 0.$$

Esta identidad se verifica si y sólo si

$$u_k'(t) - (k+2)(k+1) u_{k+2}(t) = 0, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Por otra parte, el dato inicial $u(x,0) = f(x)$ de la EDP permite identificar el dato inicial de cada uno de los coeficientes u_k:

$$u_k(0) = f_k, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales con un número infinito de incógnitas. Su resolución excede obviamente de las técnicas que la teoría de EDO proporciona.

Este sistema puede ser abordado nuevamente mediante el método de Cauchy. En efecto, suponiendo que cada una de las funciones $u_k(t)$ es analítica, el problema se reduce a identificar todos los coeficientes de su desarrollo en series de potencias:

$$u_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{k,j} t^j.$$

Las ecuaciones anteriores pueden entonces reescribirse del modo siguiente:

$$(j+1)u_{k,j+1} - (k+2)(k+1)u_{k,j} = 0, \quad \forall k,\, j \geqslant 0.$$

Estas ecuaciones, junto con los datos iniciales que permiten identificar los coeficientes correspondientes al índice $j = 0\,(u_{k,0} = f_k)$, permiten identificar de manera única todos los coeficientes $u_{k,j}\; k, j \geqslant 0$.

Queda pendiente entender si los coeficientes que hemos identificado de este modo garantizan la convergencia de la serie de potencias correspondiente.

La solución puede ser contruida de manera explícita mediante la solución fundamental o núcleo de Gauss

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left(-x^2/4t\right). \tag{13.2}$$

Es fácil comprobar que el núcleo $\mathcal{G}$ verifica las siguientes propiedades:

- *Autosemejanza:* $\mathcal{G}$ es de la forma

  $$\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} F(x/\sqrt{t}),$$

  donde

  $$F(z) = (4\pi)^{-1/2} \exp\left(-z^2/4\right).$$

- *Conservación de la masa*

  $$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x,t)dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

- La función $\mathcal{G}$ es de clase C^∞ (de hecho analítica real) para todo $t > 0$.

- La amplitud máxima de la función $\mathcal{G}$ decrece con el factor multiplicativo del orden de $t^{-1/2}$.

- $\mathcal{G}$ es una función par con respecto a la variable espacial x.

Es además fácil comprobar que el núcleo de Gauss es una solución de la ecuación del calor. En efecto, en vista de la estructura autosemejante de $\mathcal{G}$ tenemos

$$\mathcal{G}_t = -\frac{1}{2t^{3/2}}F(x/\sqrt{t}) - \frac{x}{2t^2}F'(x/\sqrt{t})$$

y

$$\mathcal{G}_{xx} = \frac{1}{t^{3/2}}F''(x/\sqrt{t}).$$

Es fácil pues comprobar que $\mathcal{G}$ satisface la ecuación del calor si y sólo si F satisface la EDO

$$-F'' - \frac{z}{2}F' = -\frac{1}{2}F,$$

cosa que, efectivamente, ocurre.

Nos queda identificar el dato inicial que el núcleo de Gauss toma en $t = 0$. En vista de su estructura autosemejante es fácil comprobar que, cuando $t \to 0^+$, $\mathcal{G}(\cdot, t)$ converge a la masa o delta de Dirac en $x = 0$ en el sentido que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x,t)\varphi(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(y)\varphi\left(\sqrt{t}y\right)dy \to \varphi(0),\ t \to 0^+,\end{aligned}$$

para toda función continua y acotada φ.

Este límite se satisface, efectivamente, gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. En efecto, si φ es continua y acotada tenemos que:

- $F(y)\varphi\left(\sqrt{t}y\right) \to F(y)\varphi(0), \quad \forall y \in \mathbb{R};$
- $\left|F(y)\varphi\left(\sqrt{t}y\right)\right| \leqslant \max_{y\in\mathbb{R}} \mid \varphi(y) \mid F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

En la medida en que $F \in L^1(\mathbb{R})$ se puede entonces aplicar el TCD[5] para deducir que

$$\int_{\mathbb{R}} F(y)\varphi\left(\sqrt{t}y\right)dy \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(0)F(y)dy = \varphi(0).$$

[5]El TCD de Lebesgue garantiza que si Ω es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y f_j es una sucesión de $L^1(\Omega)$ tal que $f_j(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$ y de modo que exista $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mid f_j(x) \mid \leqslant g(x), \quad \forall x \in \Omega, \forall j$$

entonces

$$\int_{\Omega} f_j(x)dx \to \int_{\Omega} f(x)dx, \text{ cuando } j \to \infty.$$

El núcleo de Gauss es por tanto solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_t - \mathcal{G}_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathcal{G}(x,0) = \delta_0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y también se denomina *solución fundamental* de la ecuación del calor. Esto es así puesto que, como veremos, el núcleo de Gauss permite calcular las soluciones del problema de valores iniciales para la ecuación del calor con datos muy generales.

En virtud de las propiedades del núcleo de Gauss $\mathcal{G}$ y de la operación de convolución no es difícil comprobar que

$$u = \mathcal{G} * f \tag{13.3}$$

es solución del problema de valores iniciales (13.1).

En efecto:

- Como $\mathcal{G}(t) \to \delta_0$ cuando $t \to 0^+$ en el sentido de las medidas, es fácil comprobar que

$$u(t) \to f \text{ cuando } t \to 0^+, \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}. \tag{13.4}$$

- Por las propiedades de la convolución tenemos que

$$u_{xx} = \mathcal{G}_{xx} * f \tag{13.5}$$

- Utilizando el TCD nuevamente se comprueba que[6]

$$u_t = \mathcal{G}_t * f. \tag{13.6}$$

- De estas dos últimas identidades se deduce que u resuelve la ecuación del calor (13.1).

En (13.50) es también fácil comprobar el enorme efecto regularizante de la ecuación del calor. En efecto, basta que $f \in L^1(I\!R)$ o que $f \in L^\infty(I\!R)$ para que la solución $u(\cdot,t)$[7] en cada instante $t > 0$ sea una función de $C^\infty(I\!R)$. Este efecto regularizante implica también la irreversibilidad temporal.[8]

De la fórmula (13.50) se deducen otras propiedades de la solución de la ecuación del calor. Todas ellas admiten claras interpretaciones físicas y obedecen, efectivamente, al comportamiento habitual en un proceso de difusión.

[6]La prueba de esta identidad es objeto de uno de los ejercicios que proponemos al final de estas notas.

[7]Interpretamos la función $u = u(x,t)$ como una función del tiempo t que, a cada instante t, tiene como imagen una función de x que varía en el tiempo.

[8]En efecto, si la ecuación del calor estuviese bien puesta en el sentido retrógrado del tiempo, como la solución es regular para $t > 0$, volviendo hacia atrás en el tiempo, obtendríamos en el instante inicial $t = 0$ una función $C^\infty(\boldsymbol{R})$. De este modo acabaríamos probando que toda función de $L^1(\boldsymbol{R})$ o $L^\infty(\boldsymbol{R})$ está en $C^\infty(\boldsymbol{R})$, cosa falsa evidentemente.

- *Principio del máximo*: Si $f \geq 0$ entonces $u \geq 0$ y en realidad $u > 0$ en $I\!R^n \times (0, \infty)$ salvo que $f \equiv 0$.

- *Conservación de la masa*:

$$\int_R u(x,t)dx = \int_R f(x)dx, \forall t > 0. \tag{13.7}$$

- *Decaimiento*:

$$\| u(t) \|_{L^\infty(R)} \leq Ct^{-1/2} \| f \|_{L^1(R)}, \forall t > 0. \tag{13.8}$$

- *Velocidad infinita de propagación.* Esta propiedad se deduce de la anterior. En efecto, consideramos como dato inicial $f = f(x)$ una función no-negativa y de soporte compacto, por ejemplo $f(x) = \chi_{(-1,1)}$, la función característica del intervalo $(-1, 1)$. La propiedad anterior demuestra que $u > 0$ en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y en un tiempo $t > 0$ arbitrariamente pequeño.

Esto demuestra que la información se propaga a velocidad infinita en el modelo que la ecuación del calor representa. Este hecho suele utilizarse frecuentemente para cuestionar la validez del modelo pues la experiencia demuestra que el calor no se propaga a velocidad infinita. Existen de hecho algunas variantes de la ecuación del calor que corrigen este hecho[9].

Pero un análisis cuantitativo de este hecho muestra que este efecto de propagación a velocidad infinita es sumamente moderado.

Con el objeto de analizarlo consideremos con un poco más de detalle el caso en que $f = \chi_{(-1,1)}$.

Entonces

$$u(x,t) = [\mathcal{G}(\cdot,t) * f](x) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{13.9}$$

De esta expresión se observa que $u(x,t) > 0$ en todo punto.

Por otra parte, si $| x |> 2$, $| x - y |>| x | -1$ para todo $y \in (-1, 1)$ por lo que

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x-y|^2/4t} dy \leqslant \int_{-1}^{1} e^{-(1-|x|)^2/4t} dy = 2e^{-(|-|x|)^2/4t}.$$

Por tanto

$$| u(x,t) | \leqslant (\pi t)^{-1/2} e^{-(1-|x|)^2/4t}, \quad \forall x \in \mathbb{R} :| x |> 2, \quad \forall t > 0. \tag{13.10}$$

De esta expresión se deduce que, para todo $t > 0$, la función $u(\cdot, t)$ tiende exponencialmente a cero cuando $| x |\to \infty$. Por tanto, si bien el efecto de una fuente inicial de calor $f = \chi_{(-1,1)}$

---

[9]Se trata de la denominada "ecuación de medios porosos"

$$u_t - (u^m)_{xx} = 0$$

donde $m > 1$. Obsérvese que la ecuación del calor corresponde al caso $m = 1$.

localizada en el intervalo $(-1,1)$ se percibe instantáneamente en toda la recta real, este es exponencialmente pequeño para los puntos que están lejos de esa fuente inicial de calor.

• *Efecto regularizante.* Como $\mathcal{G}(\cdot,t) \in \mathcal{B}C^\infty(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$, de las propiedades elementales de la convolución deducimos que

$$u = \mathcal{G}(\cdot,t) * f \in \mathcal{B}C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall t > 0 \tag{13.11}$$

para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, a pesar de que la ecuación del calor arranque de un dato inicial f meramente integrable, la solución se hace infinitamente regular en un tiempo arbitrariamente pequeño.

• *Conservación de la masa.*

Integrando la ecuación del calor en la variable espacial obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t - u_{xx})(x,t)dx = 0. \tag{13.12}$$

Por otra parte,[10]

$$\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx. \tag{13.13}$$

Además, tal y como veremos más adelante,

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x,t)dx = 0, \quad \forall t > 0. \tag{13.14}$$

De estas identidades se deduce inmediatamente que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = 0, \tag{13.15}$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \quad \forall t > 0. \tag{13.16}$$

Comprobemos ahora la identidad (13.35). Bajo la hipótesis de que $\mid u(x,t) \mid + \mid u_x(x,t) \mid \to 0$ cuando $\mid x \mid \to \infty$ no es difícil obtenerla mediante la fórmula de integración por partes. En efecto, supongamos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x,t)dx = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)dx.$$

Obsérvese que para que esto sea así es suficiente que $u_{xx}(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Aplicamos ahora la fórmula de integración por partes obteniendose

$$\int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)dx = u_x(\cdot,t)\Big|_{-L}^{L} - u(\cdot,t)\Big|_{-L}^{L}.$$

[10]Esta identidad puede obtenerse a partir de las propiedades de regularidad de la solución que el núcleo de Gauss proporciona y de la aplicación del TCD.

Suponiendo que

$$(13.17) \qquad | u(x,t) | + | u_x(x,t) | \to 0, \; | x | \to \infty,$$

deducimos que (13.35) se cumple.

Por otra parte, del efecto regularizante del núcleo de Gauss no es difícil concluir que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ se tiene $u_{xx} \in L^1(\mathbb{R})$ así como (13.38). Concluimos así la ley de conservación de la masa (13.37)

Esta ley de conservación puede también deducirse de la fórmula explícita de la solución si bien el método que acabamos de emplear, basado en la integración por partes, es más interesante y útil en la medida que puede ser aplicado en muchos otros casos.

En virtud de la fórmula explícita de la solución tenemos que, tras aplicar el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)dydx \\
&= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} dx \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)dy
\end{aligned}$$

puesto que

$$(4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} dx = 1, \; \forall y \in \mathbb{R}, \; \forall t > 0.$$

•*Ley de disipación de la energía*

Multiplicando la ecuación del calor e integrando con respecto a la variable espacial tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} u_t u dx - \int_{\mathbb{R}} u_{xx} u dx = 0.$$

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} u_t u dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

mientras que de la fórmula de integración por partes obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx} u dx = - \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx.$$

Obtenemos así la fórmula de disipación de energía:

$$(13.18) \qquad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = - \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx,$$

o, una vez integrada en la variable temporal,

$$(13.19) \qquad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx dt$$

fórmula que es válida si $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Un análisis cuidadoso del núcleo de Gauss permite comprobar que, efectivamente, la energía o norma L^2 de la solución del calor se disipa. En efecto, recordemos que el núcleo de Gauss $\mathcal{G}$ tiene la estructura autosemejante $\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathcal{F}(x/\sqrt{t})$. De esta expresión es fácil deducir que

$$\| \mathcal{G}(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R})} = t^{-1/4} \| \mathcal{F} \|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{13.20}$$

que indica un decaimiento en tiempo de la norma L^2, compatible con las leyes de disipación.

La fórmula (13.20) sin embargo señala que cuando $t \to 0^+$ la norma L^2 del núcleo de Gauss explota.

Esto es efectivamente así puesto que, recordemos, el dato inicial de $\mathcal{G}$ es la delta de Dirac. Si bien la delta de Dirac es el límite en el sentido de las medidas de una sucesión (aproximación de la identidad) que permanece acotada en L^1, esta sucesión no puede estar acotada en L^2.[11]

Cabe plantearse si la fórmula de disipación de la energía puede obtenerse directamente operando en la fórmula de representación de la solución por condución con el núcleo de Gauss. Esto es efectivamente posible pero, como veremos, el procedimiento resulta excesivamente complejo frente a lo fácil que resulta el método de energía antes desarrollado basado en multiplicar la ecuación por u y en integrar por partes.

Tenemos que, aplicando Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx &= (4\pi t)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-z|^2/4t} f(z)dz \right) dy \\ &= (4\pi t)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[|x-y|^2+|x-z|^2\right]/4t} dx \right) dydz. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} | x-y |^2 &+ | x-z |^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2(y+z)x \\ &= 2\left(x-(y+z)/2\right)^2 - \frac{(y+z)^2}{2} + y^2 + z^2 \\ &= 2\left(x-(y+z)/2\right)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[|x-y|^2/4t+|x-z|^2/4t\right]} dx = e^{-(y-z)^2/8t} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-(y+z)/2)^2/2t} dx = e^{-(y-z)^2/8t} \sqrt{2\pi t}.$$

[11] Recordemos que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert. En todo espacio de Hilbert las sucesiones acotadas son relativamente compactas con respecto a la topología débil. En el caso de una aproximación de la identidad su límite es la delta de Dirac que no pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Esto supone un obstáculo para que la aproximación de la identidad permanezca acotada en $L^2(\mathbb{R})$, tal y como su expresión explícita indica.

Combinando estas dos identidades tenemos

$$
\begin{aligned}
(13.22)\qquad \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx &= \frac{1}{2}(2\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)f(z)e^{-(y-z)^2/8t}dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)f(z)\mathcal{G}(y-z,\, zt)dydz.
\end{aligned}
$$

Derivando en tiempo esta expresión y usando que $\mathcal{G}$ es solución de la ecuación del calor obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(13.23)\qquad & \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)f(z)\mathcal{G}_t(y-z,\, 2t) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)f(z)\mathcal{G}_{xx}(y-z,\, 2t)dydz \\
&= -2\int_{\mathbb{R}} f(y)f(z)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[\mathcal{G}(y-z,\, 2t)\right]dydz \\
&= -2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f'(y)f'(z)\mathcal{G}(y-z,\, 2t)dydz.
\end{aligned}
$$

En virtud de (13.22) vemos que el último término que aparece en (13.23) puede también ser reescrito de la siguiente manera

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f'(y)f'(z)\mathcal{G}(y-z),\, 2t)dydz = \int_{\mathbb{R}} v^2(x,t)dx$$

siendo

$$v = \mathcal{G}(\cdot,t) * f'$$

i.e. siendo v la solución de la ecuación del calor con datos iniciales f'. Obviamente $v = u_x$ por lo que

$$(13.24)\qquad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f'(y)f'(z)\mathcal{G}(y-z,\, 2t)dydz = \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx.$$

Combinando (13.23) y (13.24) obtenemos inmediatamente la fórmula de disipación de energía:

$$(13.25)\qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = -2\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx.$$

En efecto, en virtud de las propiedades del núcleo de Gauss $\mathcal{G}$ y de la operación de convolución no es difícil comprobar que

$$(13.26)\qquad u = \mathcal{G} * f$$

es solución del problema de valores iniciales (13.1).

En efecto:

- Como $\mathcal{G}(t) \to \delta_0$ cuando $t \to 0^+$ en el sentido de las medidas, es fácil comprobar que

$$u(t) \to f \text{ cuando } t \to 0^+, \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}. \tag{13.27}$$

• Por las propiedades de la convolución tenemos que

$$u_{xx} = \mathcal{G}_{xx} * f \tag{13.28}$$

• Utilizando el TCD nuevamente se comprueba que[12]

$$u_t = \mathcal{G}_t * f. \tag{13.29}$$

• De estas dos últimas identidades se deduce que u resuelve la ecuación del calor.

La fórmula de representación (13.26) de la solución de (**??**) permite deducir con facilidad algunas de las propiedades que mejor caracteriza al proceso que la ecuación del calor representa:

• *Principio del máximo.* Si $f \geqslant 0$ p. c. t. $x \in \mathbb{R}$, y $f \not\equiv 0$, entonces $u(x,t) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Esto es una consecuencia inmediata del hecho que $\mathcal{G} > 0$.

• *Velocidad infinita de propagación.* Esta propiedad se deduce de la anterior. En efecto, consideramos como dato inicial $f = f(x)$ una función no-negativa y de soporte compacto, por ejemplo $f(x) = \chi_{(-1,1)}$, la función característica del intervalo $(-1,1)$. La propiedad anterior demuestra que $u > 0$ en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ y en un tiempo $t > 0$ arbitrariamente pequeño.

Esto demuestra que la información se propaga a velocidad infinita en el modelo que la ecuación del calor representa. Este hecho suele utilizarse frecuentemente para cuestionar la velidez del modelo pues la experiencia demuestra que el calor no se propaga a velocidad infinita. Existen de hecho algunas variantes de la ecuación del calor que corrigen este hecho[13].

Pero un análisis cuantitativo de este hecho muestra que este efecto de propagación a velocidad infinita es sumamente moderado.

Con el objeto de analizarlo consideremos con un poco más de detalle el caso en que $f = \chi_{(-1,1)}$.

Entonces

$$u(x,t) = \left[\mathcal{G}(\cdot,t) * f\right](x) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{13.30}$$

De esta expresión se observa que $u(x,t) > 0$ en todo punto.

[12] La prueba de esta identidad es objeto de uno de los ejercicios que proponemos al final de estas notas.

[13] Se trata de la denominada “ecuación de medios porosos”

$$u_t - (u^m)_{xx} = 0$$

donde $m > 1$. Obsérvese que la ecuación del calor corresponde al caso $m = 1$.

Por otra parte, si $\mid x \mid > 2$, $\mid x - y \mid > \mid x \mid -1$ para todo $y \in (-1,1)$ por lo que

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x-y|^2/4t} dy \leqslant \int_{-1}^{1} e^{-(1-|x|)^2/4t} dy = 2e^{-(|-|x|)^2/4t}.$$

Por tanto

$$\mid u(x,t) \mid \leqslant (\pi t)^{-1/2} e^{-(1-|x|)^2/4t}, \quad \forall x \in \mathbb{R} : \mid x \mid > 2, \quad \forall t > 0. \tag{13.31}$$

De esta expresión se deduce que, para todo $t > 0$, la función $u(\cdot, t)$ tiende exponencialmente a cero cuando $\mid x \mid \to \infty$. Por tanto, si bien el efecto de una fuente inicial de calor $f = \chi_{(-1,1)}$ localizada en el intervalo $(-1,1)$ se percibe instantáneamente en toda la recta real, este es exponencialmente pequeño para los puntos que están lejos de esa fuente inicial de calor.

- *Efecto regularizante.*

$$\text{Como } \mathcal{G}(\cdot, t) \in \mathcal{B}C^\infty(\mathbb{R}) \text{ para todo } t > 0,$$

de las propiedades elementales de la convolución deducimos que

$$u = \mathcal{G}(\cdot, t) * f \in \mathcal{B}C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall t > 0 \tag{13.32}$$

para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, a pesar de que la ecuación del calor arranque de un dato inicial f nuevamente integrable, la solución se hace infinitamente regular en un tiempo arbitrariamente pequeño.

- *Conservación de la masa.*

Integrando la ecuación del calor en la variable espacial obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t - u_{xx})(x,t) dx = 0. \tag{13.33}$$

Por otra parte,[14]

$$\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u(x,t) dx. \tag{13.34}$$

Además, tal y como veremos más adelante,

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x,t) dx = 0, \quad \forall t > 0. \tag{13.35}$$

De estas identidades se deduce inmediatamente que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u(x,t) dx = 0, \tag{13.36}$$

[14] Esta identidad puede obtenerse a partir de las propiedades de regularidad de la solución que el núcleo de Gauss proporciona y de la aplicación del TCD.

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \quad \forall t > 0. \tag{13.37}$$

Comprobemos ahora la identidad (13.35). Bajo la hipótesis de que $| \; u(x,t) \; | + | \; u_x(x,t) \; | \to 0$ cuando $| \; x \; | \to \infty$ no es difícil obtenerla mediante la fórmula de integración por partes. Pero conviene proceder con cuidado pues éste principio, sólo es válido en intervalos de integración acotados.

En efecto, supongamos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x,t)dx = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)dx.$$

Obsérvese que para que esto sea así es suficiente que $u_{xx}(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Aplicamos ahora la fórmula de integración por partes obteniendose

$$\int_{-L}^{L} u_{xx}(x,t)dx = u_x(\cdot,t)\Big|_{-L}^{L} - u(\cdot,t)\Big|_{-L}^{L}.$$

Suponiendo que

$$| \; u(x,t) \; | + | \; u_x(x,t) \; | \to 0, \; | \; x \; | \to \infty, \tag{13.38}$$

deducimos que (13.35) se cumple.

Por otra parte, del efecto regularizante del núcleo de Gauss no es difícil concluir que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ se tiene $u_{xx} \in L^1(\mathbb{R})$ así como (13.38). Concluimos así la ley de conservación de la masa (13.37)

13.2 Propiedades elementales de la convolución

Recordemos que la convolución está definida del siguiente modo:

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy. \tag{13.39}$$

La misma definición es válida en varias dimensiones espaciales.

Recordemos brevemente algunas propiedades básicas de la operación de convolución:

• **Conmutatividad:**

$$f * g = g * f. \tag{13.40}$$

Para comprobar esta propiedad basta hacer el cambio de variable $z = x - y$ en la integral (13.39). Obtenemos así,

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)dz = [g * f](x).$$

• **Desigualdad de Young:** Es fácil comprobar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{aligned} |[f * g](x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \mid f(x-y) \mid g(y) dy \\ &\leqslant \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \mid f(x-y) \mid dy = \| f \|_{L^1(\mathbb{R})} \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R})} . \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\| f * g \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \| f \|_{L^1(\mathbb{R})} \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R})} . \tag{13.41}$$

Se trata de un caso particular de la desigualdad de Young que garantiza que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ con

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{13.42}$$

y además

$$\| f * g \|_{L^r(\mathbb{R})} \leqslant \| f \|_{L^p(\mathbb{R})} \| g \|_{L^q(\mathbb{R})} . \tag{13.43}$$

La desigualdad (13.41) corresponde a (13.43) en el caso particular $p = \infty$, $q = 1$ en el que (13.42) se satisface con $r = \infty$.

• **Efecto regularizante:** Si $f \in BC(\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in BC(\mathbb{R})$. Aquí y en lo sucesivo BC denota el espacio de las funciones continuas y acotadas[15].

Para comprobar esta propiedad basta aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada (TCD) de Lebesgue en la representación integral de la convolución.

En efecto, para comprobar la continuidad de $f * g$ tenemos que ver si $x_n \to x$, entonces $[f * g](x_n) \to [f * g](x)$. Por la definición integral de la convolución el problema se reduce a ver que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x_n - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy. \tag{13.44}$$

Para comprobar que (13.44) se cumple aplicamos el TCD y para ello hemos de verificar que:

∗ $f(x_n - y) g(y) \to f(x-y) g(y)$, p.c.t. y $\in \mathbb{R}$. Esto es obvio de la continuidad de f.

∗ $\mid f(x_n - y) g(y) \mid \leqslant h(y)$, p.c.t. y $\in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, siendo $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Esto es nuevamente fácil de comprobar puesto que

$$\mid f(x_n - y) g(y) \mid \leqslant \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \mid g(y) \mid .$$

Basta por tanto tomar $h = \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \mid g(y) \mid$ como función mayorante.

[15] "Bounded and continuous" en inglés.

Por lo tanto el límite (13.44) se cumple y la función $f * g$ es continua. La función $f * g$ es además acotada en virtud de (13.41).

Esta propiedad puede interpretarse efectivamente como un efecto regularizante de la convolución. En efecto, basta que una de las funciones que intervienen en la misma sea continua y acotada para que el resultado lo sea.

• Otra de las propiedades más interesantes de la convolución se presenta en relación a la derivación. En efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial f_i} * g. \tag{13.45}$$

Esta identidad es obvia a partir de la definición de la convolución. Si utilizamos su propiedad conmutativa se deduce que, también,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}. \tag{13.46}$$

Obviamente, necesitamos de algunas propiedades mínimas de regularidad e integrabilidad de las funciones f y g para que (13.45) y (13.46) se cumplan.

Por ejemplo, (13.45) es cierto si $f \in BC^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$. Aquí y en lo sucesivo $BC^1(\mathbb{R})$ denota el espacio de Banach de las funciones tales que $f \in BC(\mathbb{R})$ y $f' \in BC(\mathbb{R})$.

13.3 El problema de valores iniciales en $I\!R^n$

El problema de Cauchy en $I\!R^n$ admite desarrollos semejantes a los de la sección anterior.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad I\!R^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{en} \quad I\!R^n. \end{cases} \tag{13.47}$$

Se trata de un problema característico en el sentido de Cauchy-Kowaleski (ver F. John [5]). Precisamente por serlo cabe esperar que (13.47) esté bien planteado a pesar de que no damos dos datos de Cauchy como es habitual en una ecuación de orden dos, sino sólo una.

La solución fundamental de (13.47) se puede calcular explícitamente. Obtenemos así el núcleo de Gauss:

$$G(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(- \mid x \mid^2 / 4t\right). \tag{13.48}$$

No es difícil comprobar que G es efectivamente la solución de (13.47) con $f = \delta_0$, la delta de Dirac en $x = 0$[16].

Por consiguiente, para "cualquier" f,

$$u = G * f \tag{13.49}$$

[16]Recordemos que la delta o masa de Dirac δ_0 es la medida tal que $< \delta_0, \phi >= \phi(0)$ para toda función continua ϕ.

representa la única solución de (13.47). (Hemos entrecomillado el cuantificador "cualquier" puesto que se requieren algunas condiciones mínimas sobre f y la propia solución para que ésta pueda escribirse de manera única como en (13.49). Basta por ejemplo con tomar $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y buscar soluciones u tales que, para cualquier $t > 0$, sean funciones acotadas (véase F. John [5])).

En (13.49) $*$ representa la convolución espacial de modo que

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{R^N} \exp\left(- \mid x-y \mid^2 /4t\right) f(y)dy. \tag{13.50}$$

En esta expresión se observa inmediatamente la velocidad infinita de propagación. En efecto, todos los valores de f, en cualquier punto y de $\mathbb{R}^n$, intervienen a la hora de calcular u en cualquier punto espacio-temporal (x,t).

13.4 El problema de Dirichlet

Consideramos ahora el problema de la difusión del calor en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$. En esta ocasión, con el objeto de que el sistema de ecuaciones sea completo tenemos también que imponer condiciones de contorno que determinen la interacción del medio Ω con el medio circundante. Desde un punto de vista matemático las condiciones más simples son las de Dirichlet. Obtenemos así el sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{13.51}$$

Las condiciones de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$ indican que las paredes del dominio Ω se mantienen a temperatura constante $u = 0$. En la práctica, frecuentemente, se utilizan otras condiciones de contorno no tanto sobre la variable u que en la ecuación del calor representa la temperatura, sino sobre el flujo de calor a través de la frontera. Así, por ejemplo, en el caso en que queramos representar que el dominio Ω está completamente aislado de su entorno impondremos condiciones de flujo nulo, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Aquí $\partial/\partial n$ denota el operador derivada normal y n es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$ que varía en función de la geometría del dominio al variar el punto $x \in \partial\Omega$. Se trata de una derivada direccional, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial n} = \nabla \cdot n,$$

donde ∇ denota el operador gradiente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ y $\cdot$ el producto escalar euclideo en $\mathbb{R}^n$.

Pero, con el objeto de simplificar y no hacer demasiado larga la presentación, en estas notas nos limitaremos a considerar las condiciones de contorno de Dirichlet como en (13.51).

En este caso la solución no es tan fácil de obtener explícitamente como lo fue para el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Son diversos los métodos disponibles para su resolución: Galerkin, semigrupos, series de Fourier, ... El lector interesado en el estudio de estos métodos puede consultar el texto de L. Evans [3].

Aquí nos centraremos en el problema de una sola dimensión espacial. Consideraremos por lo tanto el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \pi. \end{array} \right. \tag{13.52}$$

En este caso la solución puede obtenerse fácilmente mediante el desarrollo en series de Fourier. En efecto, las funciones trigonométricas

$$w_l(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(jx), \ j \geq 1 \tag{13.53}$$

constituyen una base ortonormal de $L^2(0,\pi)$.

Por lo tanto, para cualquier función $f \in L^2(0,\pi)$ la solución u de (13.52) se puede escribir en la forma

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_j e^{-j^2 t} w_l(x) \tag{13.54}$$

donde $\left\{ \hat{f}_j \right\}_{j\geq 1}$ son los coeficientes de Fourier de la función f, i.e.

$$\hat{f}_j = \int_0^{\pi} f(x) w_l(x) dx. \tag{13.55}$$

Esta expresión de la solución en series de Fourier nos resultará de gran utilidad a la hora de abordar la aproximación numérica de la solución. En realidad, las propias sumas parciales de la serie proporcionan ya una manera sistemática de aproximar la solución. Así, para cada $M \in \mathbb{N}$ podemos introducir

$$u_M(x,t) = \sum_{j=1}^{M} \hat{f}_j e^{-j^2 t} w_l(x), \tag{13.56}$$

y es entonces fácil comprobar que

$$\| u(t) - u_M(t) \|_{L^2(0,\pi)} \leq e^{-M^2 t/2} \| f \|_{L^2(0,\pi)}, \ \forall t \geq 0, \tag{13.57}$$

lo cual indica, efectivamente, que la aproximación de u mediante u_M mejora a medida que $M \to \infty$.

En este caso la obtención de las funciones de base $\{w_l\}_{j\geq 1}$ (que son, en realidad, autofunciones del operador de Laplace involucrado en la ecuación del calor con condiciones de contorno de Dirichlet) es muy simple por encontrarnos en una dimensión espacial, en varias dimensiones espaciales el problema es mucho más complejo, pues pasa por calcular las autofunciones del problema:

$$\left\{\begin{array}{lll} -\Delta w = \lambda w & \text{en} & \Omega \\ w = 0 & \text{en} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{13.58}$$

Antes que nada conviene señalar que las autofunciones w_l de (13.53) se obtienen precisamente al resolver el análogo uni-dimensional de (13.58). En este caso el problema de autovalores es un sencillo problema de Sturm-Liouville que se escribe en la forma

$$\left\{\begin{array}{ll} -w'' = \lambda w, & 0 < x < \pi \\ w(0) = w(\pi) = 0. & \end{array}\right. \tag{13.59}$$

Los autovalores son en este caso

$$\lambda_l = l^2,\, l \geq 1 \tag{13.60}$$

y las autofunciones correspondientes, una vez normalizadas en $L^2(0, \pi)$, las funciones trigonométricas (13.53).

Si bien la teoría espectral garantiza la existencia de una sucesión de autofunciones que constituyen una base ortogonal de $L^2(\Omega)$ ([1]), su forma depende de la geometría del dominio Ω y, por supuesto, su cálculo explícito es imposible salvo para dominios muy particulares ([5]). Por lo tanto, en varias dimensiones espaciales, la utilización de estas autofunciones exige previamente el desarrollo de métodos numéricos para su aproximación.

Este hecho, junto con otro igualmente importante como es que para muchas ecuaciones (no-lineales, coeficientes dependientes del espacio-tiempo, etc.) la resolución mediante series de Fourier no es posible, aconsejan que desarrollemos métodos alternativos que permitan abordar sistemáticamente la ecuación del calor y sus variantes, sin pasar por la Teoría Espectral.

Volvamos entonces a la ecuación (13.52) y a su solución (13.54).

En la expresión (13.54) se observa un comportamiento de u distinto al del problema de Cauchy en $\mathbb{R}^n$.

En efecto, en este caso es fácil comprobar que la solución decae exponencialmente cuando $t \to \infty$:

$$\| u(t) \|^2_{L^2(0,\pi)} = \sum_{j=1}^{\infty} \mid \hat{f}_j \mid^2 e^{-2j^2 t} \leq e^{-2t} \sum_{j=1}^{\infty} \mid \hat{f}_j \mid^2 = e^{-2t} \| f \|^2_{L^2(0\pi)} . \tag{13.61}$$

Esta propiedad de decaimiento puede también obtenerse directamente de la ecuación (13.52) mediante el *método de la energía*, sin hacer uso del desarrollo en serie de Fourier de la solución. En efecto, multiplicando en (13.52) por u e integrando por partes se obtiene que

$$0 = \int_0^\pi (u_t - u_{xx})\, u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u^2 dx + \int_0^\pi u_x^2 dx,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u^2 dx = -\int_0^\pi u_x^2 dx. \tag{13.62}$$

Utilizamos ahora la desigualdad de Poincaré ([1])

$$\int_0^\pi u_x^2 dx \geq \int_0^\pi u^2 dx,\ \forall u \in H_0^1(0,\pi) \tag{13.63}$$

que, combinada con la identidad (13.62), proporciona la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi u^2 dx \leq -2\int_0^\pi u^2 dx. \tag{13.64}$$

Integrando esta desigualdad (13.64) obtenemos exactamente la tasa exponencial de decaimiento de la solución que predijimos en (13.61).

Observación 13.1 La *desigualdad de Poincaré* (ver [B]) garantiza que

$$\int_0^\pi |a'(x)|^2 \, dx \geq \int_0^\pi |a(x)|^2 \, dx,\ \forall a \in H_0^1(0,\pi). \tag{13.65}$$

Aquí y en lo sucesivo $H_0^1(0,\pi)$ es el espacio de Sobolev de las funciones de $L^2(0,\pi)$ cuya primera derivada sea también una función de $L^2(0,\pi)$ y que se anula en el borde $x = 0, \pi$. Se trata de un subespacio cerrado de $H^1(0,\pi)$, el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable con derivada de cuadrado integrable. La norma canónica del espacio $H^1(0,\pi)$ viene dada por

$$||f||_{H^1(0,\pi)} = \left[\int_0^\pi [f^2 + |f'|^2] dx\right]^{1/2}.$$

Conviene subrayar que las funciones de H^1, por tener derivada integrable, son funciones continuas, por lo que su restricción al borde está bien definida. En el espacio $H_0^1(0,\pi)$, gracias a la desigualdad de Poincaré, la norma inducida por el espacio $H^1(0,\pi)$ es equivalente a

$$||f||_{H_0^1(0,\pi)} = \left[\int_0^\pi |f'|^2 dx\right]^{1/2}.$$

La mejor constante de la desigualdad (13.65) viene caracterizada por el siguiente principio de minimalidad que involucra el cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \min_{a \in H_0^1(0,\pi)} \frac{\displaystyle\int_0^\pi |a'(x)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_0^\pi a^2(x) dx}. \tag{13.66}$$

En este caso $\lambda_1 = 1$ puesto que se trata del primer autovalor λ_1 del operador $-d^2/dx^2$ en $H_0^1(0, \pi)$ que posee una sucesión de autovalores (13.60).

■

14 La ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers es un modelo sencillo para la propagación de fluidos que puede entenderse como una versión simplificada uni-dimensional de las célebres ecuaciones de Euler para un fluido ideal o perfecto incompresible.

Tal y como veremos, la ecuación permite la aplicación del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya pero a su vez es un ejemplo modelo de sistema en el que las soluciones pueden generar singularidades en tiempo finito. Como veremos, se trata en este caso de discontinuidades no evitables de la solución, también denominadas de *choque*.

Consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación de Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{14.1}$$

Se trata obviamente de una EDP de orden uno, no-lineal (cuasilineal según la terminología empleada en su clasificación). La no-linealidad involucrada en la ecuación es polinomial cuadrática de modo que la ecuación entra en el marco de las que pueden ser tratadas mediante el Teorema de C-K.

La ecuación de Burgers es una ecuación de transporte en la que la velocidad de propagación depende de la propia solución siendo este el valor de la propia solución u. Como veremos más adelante, esto nos permite resolver la ecuación mediante el método de las características, pero antes de hacerlo conviene analizarla en el contexto del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

En (14.1) el dato de Cauchy (uno sólo basta por tratarse de una ecuación de orden uno) viene dado sobre la recta $\{t = 0\}$. Se trata en este caso de una recta no característica puesto que el coeficiente de la derivada parcial ∂_t en la dirección normal es distinto de cero (igual a uno en este caso).

El Teorema de C-K asegura por tanto que si el dato inicial $f = f(x)$ es una función analítica real, existe una única solución local analítica $u = u(x,t)$ en un entorno de la recta $t = 0$ donde se da el dato de Cauchy.

Pero, como mencionamos anteriormente, en este caso la solución puede calcularse con facilidad mediante el método de las características. Esto nos va a permitir comprobar que, para algunos datos iniciales, la solución no está globalmente definida en tanto que función regular y que el carácter local del resultado que el Teorema de C-K proporciona es por tanto inevitable.

Las curvas características $x = x(t)$ son las soluciones de la ecuación:

$$\begin{cases} x'(t) = u(x(t), t), \quad t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{14.2}$$

Cuando la solución $u = u(x, t)$ es localmente Lipschitziana en la variable x y, digamos, continua en el tiempo t, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ la ecuación (14.2) admite una única solución local que denominaremos *curva característica*.

Tal y como ocurría en las ecuaciones de transporte lineales, las soluciones regulares de (14.1) (basta con que sean de clase C^1) son constantes a lo largo de las características. En efecto, $u(x(t), t)$, i.e. el valor de la solución u a lo largo de una curva característica, es independiente del tiempo t. Basta para comprobarlo con derivar con respecto el tiempo t y usar la ecuación (14.1) así como la ecuación (14.2) satisfecha por las curvas características:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[u(x(t), t)\right] &= x'(t)u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = \\ &= u(x(t), t)u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = 0. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Por lo tanto, tal y como ocurría en las ecuaciones de transporte lineales la solución puede determinarse de manera única a partir del dato inicial $f = f(x)$ y de las curvas características solución de (14.2). Ahora bien, en este caso, el cálculo de las soluciones de (14.2) exige en principio el conocimiento de la solución u de (14.1). Esto hace que el método de las características entre en un aparente círculo vicioso que acaba no proporcionando el valor de la solución.

Pero esto no es así. En efecto, como u es constante a lo largo de las características tenemos

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = f(x(0)) = f(x_0) \tag{14.4}$$

siendo x_0 el punto de arrancada de la característica $x = x(t)$ solución de (14.2).

De (14.2) y (14.4) deducimos que, en realidad, las características han de ser necesariamente soluciones de la ecuación simplificada

$$\begin{cases} x'(t) = f(x_0), \quad t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{14.5}$$

y por tanto

$$x(t) = x_0 + f(x_0)t, \; t > 0. \tag{14.6}$$

Vemos por tanto que las curvas características son en realidad *rectas*. La diferencia mayor con respecto al caso de la ecuación de transporte con coeficientes constantes es que estas rectas no son paralelas sino que su pendiente depende del punto x_0 de arrancada. En efecto, si escribimos la ecuación (14.6) como

$$t = \frac{1}{f(x_0)}(x - x_0), \tag{14.7}$$

vemos que la pendiente de la recta característica en el plano (x,t) es $1/f(x_0)$.

Este análisis permite dar una simple "receta" para el cáculo de la solución de la ecuación de Burgers:

- En primer lugar dibujamos las rectas características en el plano (x,t). Se trata de rectas que en el instante $t = 0$ pasan por el punto x_0 y que tienen pendiente $1/f(x_0)$.
- Una vez que las rectas han sido obtenidas, damos a la solución u en cada punto (x,t) del plano, el valor del dato inicial f en el punto x_0 de arrancada de la característica que en el instante t pase por el punto x.

En definitiva se trata de una definición de la solución que hace que ésta obedezca a la ecuación implícita:

$$u(x,t) = f(x - u(x,t)t). \tag{14.8}$$

Pero, a la vista de este método de construcción de soluciones, cabe plantearse dos incógnitas:

- ¿Las rectas características llegan a todos los puntos (x,t) del plano con $t > 0$?
- ¿Podemos asegurar que por cada punto del plano sólo pasa una característica?

Tal y como vamos a ver, contrariamente a lo que ocurría en el caso de las ecuaciones lineales, ninguna de estas cuestiones admiten una respuesta afirmativa en general, sino que ambas dependen del dato inicial considerado.

Para comprobarlo distinguimos los dos siguientes casos:

- **Dato inicial creciente**

Consideramos un dato inicial positivo, creciente y regular $f = f(x)$ de modo que $f(x) \to 1$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, por ejemplo.

Tal y como indicabamos anteriormente, la pendiente en el plano (x,t) de la característica que arranca del punto x_0 es $1/f(x_0)$. Obviamente, como f es positiva y decreciente la velocidad de propagación de las características aumenta a medida que el punto de arrancada x_0 crece. Por tanto dos características distintas no pueden cruzarse en ningún tiempo $t > 0$. La segunda cuestión tiene pues respuesta afirmativa en este caso.

Por otra parte, si la función f es continua, la pendiente $1/f$ de las rectas características es también una función continua de x_0. No es pues difícil comprobar que, en este caso, ningún punto (x,t) del semiplano $t > 0$ quede sin que una (y sólo una) característica lo alcance.

Por lo tanto, en este caso, el método de las características define una única solución global de la ecuación de Burgers en el semiplano $t > 0$.

• **Dato inicial decreciente**

Consideramos ahora el caso de un dato inicial f positivo y decreciente tal que

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \text{ y } f(x) \to 1$$

cuando $x \to +\infty$. En este caso la pendiente $1/f$ de las rectas características es una función creciente de x. Por lo tanto, los puntos x que se sitúan más a la izquierda del eje real se propagan en esta ocasión a una velocidad mayor y es previsible que los choques se produzcan.

En efecto, en esta situación no es difícil calcular el tiempo que dos características que arrancan de los puntos x_0 y x_1 respectivamente necesitan para cortarse. Las ecuaciones respectivas son:

$$t = \frac{1}{f(x_0)}(x - x_0) \tag{14.9}$$

y

$$t = \frac{1}{f(x_1)}(x - x_1) \tag{14.10}$$

y por tanto se cortan en el punto (x, t) si

$$\frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{f(x_1)}(x - x_1). \tag{14.11}$$

es decir, si

$$\left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)}\right) x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)} x_1. \tag{14.12}$$

Por tanto, si $x_0 > x_1$, como $f(x_0) < f(x_1)$ el punto x donde el choque se produce queda perfectamente identificado por la ecuación (14.12). Lo mismo ocurre con el instante de tiempo en que se produce. En efecto, teniendo en cuenta que las ecuaciones de las rectas características son

$$x = f(x_0)t + x_0 \tag{14.13}$$

y

$$x = f(x_1)t + x_1, \tag{14.14}$$

cuando el choque se produce, tenemos que

$$f(x_0)t + x_0 = f(x_1)t + x_1, \tag{14.15}$$

de donde deducimos que

$$t = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)}. \tag{14.16}$$

Como f es una función decreciente vemos que el tiempo de choque obtenido en (14.16) es positivo.

Conviene observar que el mismo argumento se puede usar cuando f es creciente. En ese caso el instante t en el que se produce el choque o cruce de características es negativo[17].

Cuando $x_1 \to x_0$ el tiempo de choque en (14.16) converge a

$$t^* = -\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{14.17}$$

El tiempo mínimo en que el choque se produce es entonces

$$t = \min_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{-1}{f'(x)}\right]. \tag{14.18}$$

Este ejemplo muestra que el resultado local de existencia y unicidad de soluciones analíticas que el Teorema de C-K proporciona no puede ser global.

En efecto, si (x, t) es un punto en que dos características que arrancan de x_0 y x_1 respectivamente se cortan, en este punto la solución no puede ser continua. En efecto, si la solución fuese regular y por tanto constante a lo largo de características se tendría

$$u(x, t) = f(x_0)$$

y, a la vez,

$$u(x, t) = f(x_1),$$

lo cual es claramente imposible si $f(x_0) \neq f(x_1)$ como ocurre cuando f es una función estrictamente decreciente.

Hay un ejemplo en el que los cálculos pueden hacerse de manera explícita. En efecto, supongamos que el dato inicial es de la forma

$$\begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \tag{14.19}$$

En este caso es fácil comprobar que el tiempo mínimo de choque en $t = 1$. Antes de que este se produzca la solución puede calcularse de manera explícita.

En efecto, no es difícil comprobar que

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & 0 < x < t \\ 0, & x > 1 \end{cases} \tag{14.20}$$

[17] Este hecho es fácilmente comprensible. En efecto, obsérvese que el cambio de variables $v(x, t) = u(-x, -t)$ transforma soluciones de la ecuación de Burgers en soluciones. Asimismo, mientras que la monotonía espacial de los perfiles se invierte, también se invierte el sentido del tiempo.

en el intervalo temporal.

Es obvio que esta solución predice un choque en el instante $t = 1$ en el punto $x = 1$ en el que la solución se encuentra ante la imposibilidad de hacer compatibles los valores $u = 1$ que toma a la izquierda de $x = 1$ y $u = 0$ que toma a la derecha.

La evolución del perfil de esta solución simula de manera simplificada el de una ola marina que se aproxima a la costa. A medida que lo hace su perfil se encrespa hasta romperse. Una vez se ha roto se desliza hasta la orilla sin más deformación.

15 La ecuación de Burgers viscosa

Los fluidos perfectos o ideales, si bien constituyen modelos matemáticos interesantes, no dejan de ser un tanto irrealistas en la medida en que todo fluido posee un cierto grado de viscosidad.

La ecuación de Burgers viscosa adopta la siguiente forma

$$u_t - \nu u_{xx} + u u_x = 0 \tag{15.1}$$

donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad.

La ecuación de Burgers considerada en la sección anterior es el límite cuando $\nu \to 0$ de la versión viscosa (15.1). Esto es asía desde un punto de vista formal, pero lo es también en el sentido más estricto y riguroso.

No es difícil comprobar que la ecuación (15.1) puede reducirse, mediante un simple cambio de variable, a la ecuación en que la viscosidad es la unidad:

$$v_t - v_{xx} + v v_x = 0. \tag{15.2}$$

En efecto, basta definir

$$u(x,t) = \sqrt{\nu} v \left(x/\sqrt{\nu},\, t \right) \tag{15.3}$$

o, recíprocamente

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} u \left(\sqrt{\nu} x,\, t \right). \tag{15.4}$$

Por otra parte, la *transformación de Cole-Hopf* permite reducir (15.2) a la ecuación del calor lineal. En efecto, consideremos

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{x} v(\sigma, t) d\sigma. \tag{15.5}$$

Para obtener la ecuación que w satisface basta con integrar la ecuación (15.2). Se obtiene entonces, suponiendo que $\mid v \mid$ y $\mid v_x \mid \to 0$ cuando $\mid x \mid \to \infty$,

$$w_t - w_{xx} + \frac{1}{2} \mid w_x \mid^2 = 0. \tag{15.6}$$

Definimos por último

$$z = 2e^{-w/2} \tag{15.7}$$

y se verifica

$$z_t - z_{xx} = 0. \tag{15.8}$$

De este modo la ecuación de Burgers viscosa (15.1) se reduce a la ecuación del calor lineal (15.8).

Con el objeto de aplicar esta transformación debemos también analizar cómo se transforman los datos iniciales. En efecto, si el dato inicial de la ecuación (15.1) es la función $f = f(x)$, i.e.

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{15.9}$$

entonces, la función

$$z(x, t) = 2e^{-\int_{-\infty}^{x} u\left(\sqrt{\nu}s, t\right) ds / 2\sqrt{\nu}} \tag{15.10}$$

satisface

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ z(x, 0) = 2e^{-\int_{-\infty}^{x} f\left(\sqrt{\nu}\sigma\right) d\sigma / 2\sqrt{\nu}}. & \end{cases} \tag{15.11}$$

Este cambio de variable puede también invertirse. En efecto, de (15.10) se deduce que

$$u\left(\sqrt{\nu}x,\, t\right) = -2\sqrt{\nu}\frac{z_x(x, t)}{z(x, t)}. \tag{15.12}$$

Como consecuencia de esta transformación, el análisis de la ecuación de Burgers viscosa puede reducirse al de la ecuación del calor.

16 Ecuaciones de convección difusión: difusión evanescente

Tal y como mencionamos en el contexto de la ecuación de Burgers, es natural considerar el problema del paso al límite cuando la viscosidad o difusividad de la ecuación del calor tiende a cero. En esta sección vamos a hacerlo en el marco lineal en el que la ecuación de transporte subyacente no es la de Burgers (en la que está presenta una no-linealidad cuadrática) sino simplemente la ecuación de transporte lineal.

Consideramos pues el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.1}$$

Aquí hemos optado por denotar mediante ε la viscosidad con el objeto de subrayar que tiende a cero, si bien es más común denotarla mediante ν.

La ecuación (16.1) es una ecuación del calor con un término convectivo adicional (u_x) en la que la constante de difusividad o de viscosidad tiende a cero. Formalmente (esto quedará probado de manera rigurosa a lo largo de esta sección); en el límite cuando $\varepsilon \to 0$, esperamos que las soluciones converjan a la solución de la ecuacióm de transporte:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.2}$$

La solución de la ecuación límite se puede calcular de manera completamente explícita:

$$u(x,t) = f(x-t), \tag{16.3}$$

e indica con claridad que (16.2) modeliza un fenómeno de transporte lineal sin deformación alguna de los perfiles.

El paso al límite de (16.1) a (16.2) es lo que se denomina un problema de *perturbaciones singulares*. La ecuación (16.1) es de orden dos y, como hemos visto en las secciones anteriores, posee algunas importantes propiedades (velocidad infinita de propagación, efecto regularizante, irreversibilidad temporal...) que no están presentes en el modelo límite. Por lo tanto, en el límite cuando $\varepsilon \to 0$ se ha necesariamente de producir un cambio drástico en las propiedades de la solución.

Sin embargo, tal y como veremos, a pesar de tratarse de un problema de perturbaciones singulares, el modo en que las soluciones de (16.1) se transforman en las de (16.2) es a la vez sumamente natural y armoniosa. En efecto, tal y como veremos las soluciones de (16.1) son esencialmente iguales que las de (16.2) pero con un cierto efecto de regularización debido a la presencia del término difusivo.

Procedamos pues a la resolución explícita de la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.4}$$

Haciendo el cambio de variable

$$v(x,t) = u(x+t,\, t) \tag{16.5}$$

vemos que v es la solución de

$$\begin{cases} v_t - \varepsilon v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.6}$$

Introducimos seguidamente:

$$w(x,t) = v(x,\, t/\varepsilon) \tag{16.7}$$

y vemos que w resuelve la ecuación

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ w(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.8}$$

La solución de (16.8) puede calcularse de manera explícita mediante la convolución con el núcleo de Gauss:

$$w(x,t) = [\mathcal{G}(\cdot,t) * f](x). \tag{16.9}$$

Deshaciendo el cambio de variables (16.7) tenemos

$$v(x,t) = [\mathcal{G}(\cdot,\varepsilon t) * f](x). \tag{16.10}$$

De (16.5) deducimos que

$$u(x,t) = [\mathcal{G}(\cdot,\varepsilon t) * f](x-t). \tag{16.11}$$

En la fórmula (16.11) se ve con claridad que, a medida que $\varepsilon \to 0$, la solución de (16.4) converge a la solución de la ecuación de transporte $f(x-t)$.

Para cada $t > 0$ fijo esto es efectivamente así puesto que

$$\mathcal{G}(\cdot,\varepsilon t) \rightharpoonup \delta_0, \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \tag{16.12}$$

en el sentido de las medidas de modo que

$$\mathcal{G}(\cdot,\varepsilon t) * f \to f, \, \varepsilon \to 0. \tag{16.13}$$

Esta última convergencia se cumple en $L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$, siempre y cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$.

En la expresión (16.11) se observa también que el efecto añadido que la ecuación aporta a la solución de la ecuación de transporte pura es un cierto efecto regularizante debido a la convolución con el núcleo Gaussiano $\mathcal{G}(\cdot,\varepsilon t)$ que se desvanece en el límite $\varepsilon \to 0$.

En el marco de la ecuación de Burgers ocurre algo semejante. La presencia de un término de viscosidad introduce un efecto de regularización adicional en la ecuación de transporte no-lineal. Lo que resulta importante en este caso es que este efecto regularizante es eficaz para todo tiempo $t > 0$ impidiendo que se produzcan choques.

Con el objeto de analizar este fenómeno con más cuidado consideramos nuevamente la ecuación de Burgers viscosa

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} + u u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16.14}$$

La función

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{x} u(\sigma,t) d\sigma \tag{16.15}$$

satisface

$$v_t - \nu v_{xx} + \frac{| v_x |^2}{2} = 0 \tag{16.16}$$

y el cambio de variable temporal

$$w(x,t) = v(x,\, t/\nu) \tag{16.17}$$

la reduce a

$$w_t - w_{xx} + \frac{1}{2\nu} \mid w_x \mid^2 = 0. \tag{16.18}$$

Es ahora fácil de comprobar que

$$z = e^{-2\nu w} \tag{16.19}$$

resuelve la ecuación del calor

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = 0 \\ z(x,0) = e^{-2\nu \int_{-\infty}^{x} f(\sigma)d\sigma} = g_\nu(x). \end{cases} \tag{16.20}$$

Por tanto

$$z(x,t = [\mathcal{G}(\cdot,t) * g_\nu](x) \tag{16.21}$$

y entonces

$$w(x,t) = -\frac{1}{2\nu} \log \Big[[\mathcal{G}(\cdot,t) * g_\nu](x) \Big]. \tag{16.22}$$

Es decir

$$v(x,t) = -\frac{1}{2\nu} \log [\mathcal{G}(\cdot,\nu t) * g_\nu](x). \tag{16.23}$$

Por lo tanto

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\nu} \frac{[\mathcal{G}_x(\cdot,\nu t) * g_\nu](x)}{[\mathcal{G}(\cdot,\nu t) * g_\nu](x)}. \tag{16.24}$$

De la expresión (16.24) de la solución u de la ecuación de Burgers viscosa (16.14) se deduce inmediatamente que:

- La solución u de (16.14) está globalmente definida para todo $\nu > 0$.

- La solución u de (16.14) es de clase $C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ para todo $\nu > 0$.

Esto significa que la introducción del término de viscosidad o de difusión en la ecuación de Burgers, por pequeño que $\nu > 0$ sea, hace que las soluciones sean regulares. Recordemos que en la ecuación de Burgers, en ausencia de viscosidad, se producían choques en tiempo finito y la solución dejaba de ser continua. El efecto regularizante del término de viscosidad $\nu > 0$ es pues evidente. Simultáneamente, las soluciones se hacen globales en tiempo.

De (16.14) se puede también ver que el límite cuando $\nu \to 0$ de la solución de (16.14) es una solución de la ecuación de Burgers en ausencia de términos de viscosidad. De hecho este proceso de paso al límite es en realidad un criterio para seleccionar la solución de la ecuación de Burgers en ausencia de viscosidad que tiene un significado físico real. Es la denominada *solución de entropía*. Desde el punto de vista de la modelización se trata de un procedimiento natural puesto que la ecuación de Burgers sin viscosidad es un modelo sencillo de fluido ideal o perfecto en ausencia absoluta de viscosidad. Sin embargo, en la práctica, todo fluido tiene un cierto grado de viscosidad. Es por tanto natural que las únicas soluciones relevantes de la ecuación de Burgers sin viscosidad sean aquéllas que se pueden obtener como límites del procedimiento de viscosidad evanescente que acabamos de describir. Un resultado clásico y relevante en el ámbito de los sistemas hiperbólicos no-lineales debido a Kruzkov garantiza que la solución de entropía así obtenida es única.

17 La ecuación de ondas

Tal y como hemos mencionado en la introducción, la ecuación de ondas es otro de los modelos más relevantes que se escribe en términos de EDP puesto que interviene, de uno u otro modo, en infinidad de problemas de la Mecánica, de la Física y de la Ingeniería. Así, se trata de un modelo ubicuo en elasticidad y vibraciones de estructuras pero también en el ámbito de la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas.

Desde un punto de vista matemático la ecuación de ondas es el opuesto exacto de la del calor pues se trata de un sistema reversible en tiempo, conservativo, carente de efectos regularizantes y en el que la velocidad de propagación es finita.

En esta sección describimos brevemente los métodos que permiten resolver la ecuación de ondas en dimensiones espaciales $n = 1, 2, 3$, que son las más relevantes desde un punto de vista físico. Mientras que en dimensiones $n = 1$ y 2 la ecuación de ondas sirve para modelizar las vibraciones de una cuerda y membrana respectivamente, en dimensiones $n = 3$ es un buen modelo para la propagación de ondas caústicas.

Por una cuestión de espacio nos ceñiremos en la ecuación de ondas. Sin embargo, muchos de los conceptos y resultados que veremos y desarrollaremos se adaptan con relativa facilidad al sistema de Lamé en elasticidad, a las ecuaciones de placas que involucran habitualmente el operador biharmónico, las ecuaciones de Schrödinger de la Mecánica Cuántica o incluso a otros modelos como las ecuaciones de Korteweg-de-Vries para las olas en canales poco profundos. Todos estos temas quedan para desarrollos posteriores.

17.1 La fórmula de d'Alembert

En primer lugar consideramos el problema de Cauchy en toda la recta:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in I\!\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in I\!\!R. \end{array}\right. \tag{17.1}$$

El operador en derivadas parciales involucrado $\partial_t^2 - \partial_x^2$ se denota frecuentemente mediante el símbolo $\Box$ y se denomina d'Alembertiano. Su versión multi-dimensional es

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta_x = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}^2.$$

Pero en esta sección nos limitaremos al caso unidimensional.

En una dimensión espacial la ecuación de ondas es un modelo simplificado para las vibraciones de pequeña amplitud de una cuerda y mediante $u = u(x,t)$ se describen las deformaciones verticales de la misma.

La solución de (17.1) puede calcularse de forma explícita. En efecto, es fácil comprobar que la solución de (17.1) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds. \tag{17.2}$$

Conviene también observar que u es de la forma

$$u(x,t) = \mathcal{F}(x+t) + \mathcal{G}(x-t) \tag{17.3}$$

donde

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}\int_0^s \psi(\sigma)d\sigma, \tag{17.4}$$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}\int_s^0 \psi(\sigma)d\sigma. \tag{17.5}$$

Es también digno de mención que cualquier función de la forma (17.3) es solución de (17.1). Este hecho corresponde a la siguiente factorización del *operador de d'Alembert*

$$\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x), \tag{17.6}$$

según la cual el *operador de ondas* es la composición de los dos *operadores de transporte* de orden uno $\partial_t \pm \partial_x$, cuyas soluciones son efectivamente *ondas viajeras* de la forma $\mathcal{F}(x+t)$ o $\mathcal{G}(x-t)$.

En la fórmula (17.2) se observa también otra de las propiedades fundamentales de la ecuación de ondas: *la velocidad finita de propagación*. Así el valor de la solución u en el punto (x,t) depende exclusivamente del valor de los datos iniciales en el *intervalo de dependencia* $[x-t,\, x+t]$. Por otra parte, una perturbación de los datos iniciales en el instante $t = 0$ en el punto x_0 sólo afecta al valor de la solución en el cono de influencia $|x - x_0| < |t|$.

Otra de las propiedades que se deduce de la fórmula de representación (17.2) es la *ausencia de efecto regularizante*. En efecto, de (17.2) se deduce que la solución u, en cualquier instante $t > 0$, es tan regular como el dato inicial f para la posición y gana una derivada con respecto a la velocidad inicial ψ. Del mismo modo, la velocidad u_t tiene la misma regularidad que ψ y pierde una derivada con respecto a f.

Al tratarse de una ecuación de orden dos en tiempo, las genuinas incógnitas del problema son tanto u como u_t. Es por eso que en (17.1) hemos de proporcionar los datos iniciales de ambas incógnitas para garantizar la existencia y unicidad de soluciones. Desde este punto de vista es habitual escribir la ecuación (17.1) como un sistema de la forma

$$\begin{cases} u_t &= v \\ v_t &= u_{xx} \end{cases}$$

o bien como un sistema de leyes de conservación hiperbólica

$$\begin{cases} u_t &= w_x \\ w_t &= u_x \end{cases}$$

Como hemos dicho anteriormente algunas de estas propiedades de la ecuación se preservan en más de una dimensión espacial. En particular, se tienen fórmulas de representación explícitas semejantes a (17.2) aunque algo más complejas ([3], [5]).

Otra de las propiedades importantes de la ecuación de ondas es la *ley de conservación de la energía.* En este caso la energía correspondiente es

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_R \left[|u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right] dx \tag{17.7}$$

y se tiene

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \, \forall t \geq 0, \tag{17.8}$$

lo cual es fácil de comprobar multiplicando la ecuación de (17.1) por u_t e integrando en $\mathbb{R}$.

Esta ley de conservación de la energía sugiere que el espacio $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ es un marco funcional adecuado para la resolución de la ecuación de ondas. Y, efectivamente, es así. Por tanto, para todo dato inicial $(f, \psi) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ existe una única solución de (17.1) en la clase $u \in C\left([0,\infty);\, H^1(\mathbb{R})\right) \cap C^1\left([0,\infty);\, L^2(\mathbb{R})\right)$. Consiguientemente vemos que el vector incógnita preserva, con continuidad en tiempo, la regularidad de los datos iniciales.

Son diversos los métodos que permiten probar este tipo de resultados de existencia y unicidad: método de Galerkin, teoría de semigrupos, transformada de Fourier, etc. Pero en el caso que nos ocupa puede deducirse inmediatamente de la fórmula de d'Alembert (17.2).

De la fórmula de representación (17.2) se deduce que la ecuación (17.1) está bien puesta en infinidad de otros espacios. Pero el más natural para resolverlo y el que se extiende de manera natural a otras situaciones como problemas de frontera o situaciones multidimensionales es precisamente el marco hilbertiano $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

17.2 El problema de Dirichlet

Consideramos ahora la ecuación de ondas en un intervalo acotado:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\
u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\
u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < \pi.
\end{array}
\right.
\tag{17.9}
$$

Se trata de un modelo simplificado para las vibraciones de una cuerda de longitud π. En este caso hemos impuesto condiciones de contorno de Dirichlet que indican que la cuerda está fija en sus extremos, si bien los resultados que aquí describimos se adaptan con facilidad a otras.

Las soluciones de (17.9) se pueden representar fácilmente en series de Fourier. En efecto, si los datos iniciales admiten el desarrollo en serie de Fourier

$$
f(x) = \sum_{l \geq 1} \hat{f}_l w_l(x);\ \psi(x) = \sum_{l \geq 1} \hat{\psi}_l w_l(x),\ 0 < x < \pi,
\tag{17.10}
$$

donde $w_l(x)$ viene dado por (13.53), la solución de (17.9) se escribe del siguiente modo

$$
u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\hat{f}_l \cos(lt) + \frac{\hat{\psi}_l}{l} \operatorname{sen}(lt) \right) w_l(x).
\tag{17.11}
$$

Esta expresión puede ser simplificada utilizando exponenciales complejas:

$$
u(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}_l e^{ilt} w_l(x),
\tag{17.12}
$$

donde

$$
w_{-l}(x) = w_l(x),\ l \geq 1 \text{ y } \hat{\theta}_l = \frac{l\hat{f}_l - i\hat{\psi}_l}{2l},\ \hat{\theta}_{-l} = \hat{\theta}_l + \frac{i\hat{\psi}_l}{l}, \quad \forall l \geq 1.
\tag{17.13}
$$

Como veremos más adelante, las soluciones de los problemas semi-discretos y completamente discretos que consideramos admiten desarrollos en serie de Fourier semejantes.

Nuevamente, la energía de las soluciones de (17.9) se conserva en tiempo.

En efecto

$$
E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[|u_t(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2 \right] dx,
\tag{17.14}
$$

satisface

$$
\frac{dE}{dt}(t) = 0,\ \forall t \geq 0,
\tag{17.15}
$$

lo cual puede comprobarse fácilmente de dos maneras. La primera, por el método de la energía, multiplicando la ecuación (17.9) por u_t e integrando con respecto a $x \in (0, \pi)$. La segunda mediante simple inspección del desarrollo en serie de Fourier (17.11). El espacio natural para resolver (17.9) es $H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$. De ese modo, cuando $(f,\psi)\in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$, (17.9) admite una única solución $u\in C\left([0,\infty);\, H_0^1(0,\pi)\right)\cap C^1\left([0,\infty);\, L^2(0,\pi)\right)$.

La energía equivale al cuadrado de la norma canónica del espacio $H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$. El hecho de que la energía permanezca constante en tiempo equivale a que la trayectoria de la solución permanece indefinidamente en una esfera del espacio $H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$, la que corresponde a los datos iniciales del sistema.

El hecho de que los datos iniciales del problema pertenezcan a $H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$ equivale a que los coeficientes $\left\{\vec{f_l}\right\}_{k\geq 1}$ y $\left\{\vec{\psi_l}\right\}_{k\geq 1}$ del desarrollo en serie de Fourier (17.11) de u satisfagan

$$\sum_{k\geq 1}\left[l^2\left|\vec{f_l}\right|^2+\left|\vec{\psi_l}\right|^2\right]<\infty, \tag{17.16}$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\vec{\theta_l}\right|^2 l^2<\infty. \tag{17.17}$$

17.3 Dimensión $n=3$. El método de las medias esféricas

Una vez de haber resuelto el problema en dimensión $n=1$ el siguiente caso en que la solución se obtiene con facilidad en el de $n=3$.

Para ello empleamos el *método de las medias esféricas.*

Consideramos por tanto el problema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{en } \mathbb{R}^3,\quad t>0\\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=g(x) & \text{en } \mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{17.18}$$

Introducimos la media esférica de u definida del modo siguiente:

$$m_u(x,\sigma,t)=\frac{1}{\omega_n\sigma^{n-1}}\int_{|x-y|=\sigma}u(y,\,t)d\sigma(y). \tag{17.19}$$

Aquí y en lo sucesivo ω_n denota la medida de la esfera unidad S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$. En el caso que nos ocupa, $n=3$.

La medida esférica (17.19) puede también escribirse del siguiente modo

$$m_u(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}u(x+r\xi,\,t)d\sigma(\xi). \tag{17.20}$$

Aunque en un principio (17.19) sólo está definida para $r>0$, se extiende a todo $r\in\mathbb{R}$ mediante la fórmula (17.20).

Utilizando la fórmula de la divergencia se deduce que

$$\begin{aligned}\partial_r m_u(x,r,t) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\nabla u(x+r\xi,\, t)\cdot\xi d\sigma(\xi)\\ &= \frac{r}{\omega_n}\int_{|\xi|<1}\Delta u(x+r\xi,\, t)d\xi\\ &= \frac{r^{1-n}}{\Delta}\omega_n\int_{|x-y|<r}u(y,t)dy = \frac{r^{1-n}}{\omega_n}\Delta x\int_0^r d\rho\int_{|x-y|=\rho}u(y,t)d\sigma(y)\\ &= r^{1-n}\Delta\int_0^r\rho^{n-1}m_u(x,r,t)d\rho.\end{aligned}$$

En este punto utilizamos la siguiente observación $\nabla u(x+r\xi,\, t)\cdot\xi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{\mathcal{S}^{n-1}}$ donde $v = v(y)$ es la función definida en B_1 del siguiente modo

$$v(y,t) = u(x+ry,\, t).$$

Entonces, efectivamente

$$\nabla_y v(y,t) = r\nabla u(x+ry,\, t)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial\nu}\Big|_{\mathcal{S}^{n-1}} = r\nabla(x+r\xi,\, t)\cdot\xi.$$

Aplicando la fórmula de Green tenemos

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi|=1}\nabla u(x+r\xi,\, t)\cdot\xi d\sigma(\xi) = \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^{n-1}}\frac{\partial v}{\partial\nu}d\sigma(y)\\ =\ &\frac{1}{r}\int_{B_1}\Delta y v(y,t)dy = r\int_{|\xi|<1}\Delta_x u(x+r\xi,\, t)d\xi.\end{aligned}$$

Esta última identidad es cierta puesto que

$$\Delta_y v(y,t) = r^2\Delta_x u(x+ry,\, t).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\partial_r m_u(x,r,t)\right) = \Delta r^{n-1}m_u(x,r,t)$$

y

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)m_u(x,r,t) = \Delta_x m_u(x,r,t).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\Delta_x m_u(x,r,t) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\Delta_x u(x+r\xi,\, t)d\xi\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}u(x+r\xi,\, t)d\xi\\ &= \frac{\partial^2 m_u}{\partial t^2}(x,r,t).\end{aligned}$$

De este modo deducimos que, para cada $x \in \mathbb{R}^3$, $m_u = m_u(x,r,t)$ es una solución de la ecuación

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 m_u}{\partial t^2} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) m_u, \; r \in \mathbb{R}, \; t > 0 \\[2ex]
m_u(x,r,0) = m_f(x,r), \; \dfrac{\partial m_u}{\partial t}(x,r,0) = m_g(x,r,0), \; r \in \mathbb{R}
\end{array}
\right. \tag{17.21}
$$

para cada $x \in \mathbb{R}^3$.

Observación. El hecho de que las medias esféricas verifiquen la ecuación de ondas (17.21) es natural. En efecto conviene recordar que $\partial_r^2 + (n-1)\partial_r/r$ es la expresión del Laplaciano para funciones radiales. Por otra parte, la rotación de una solución de la ecuación de ondas es solución de la misma ecuación. Superponiendo todas las posibles rotaciones obtenemos la media esférica que es pues solución de la ecuación de ondas. Como además es radial satisface (17.21).

■

Observamos ahora que m_u es solución de (17.21) si y sólo si

$$v = r m_u(x,r,t) \tag{17.22}$$

satisface la ecuación de ondas $1-d$

$$v_{tt} - r v_{rr} = 0. \tag{17.23}$$

Aplicando la fórmula de d'Alembert a v obtenemos que

$$v(x,r,t) \;\; = \;\; \frac{1}{2}\left[(r+t)m_f(x,r+t) + (r+t)m_f(x,r-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \mathcal{S} m_g(x,s)ds.$$

De esta expresión recuperamos

$$m_u r,t) = \frac{1}{2r}\left[(r+t)m_f(r+t) + (r-t)m_f(r-t)\right] + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} s m_g(s)ds. \tag{17.24}$$

En la expresión anterior hemos omitido el símbolo x en la notación de las medias para simplificar las expresiones.

La identidad (17.24) proporciona una fórmula explícita para la media esférica m_u. Debemos ahora de obtener el valor de u en el punto (x,t).

Para ello observamos que

$$u(x,t) = \lim_{r \to 0} m_u(x,r,t). \tag{17.25}$$

Obtenemos así

$$u(x,t) = m_f(x,t) + t\partial_t m_f(x,t) + t m_g(x,t). \tag{17.26}$$

En efecto, como m_f y m_g son pares con respecto a r obtenemos que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{(r+t)m_f(x,r+t)+(r-t)m_f(x,r-t)}{r} \\
= \quad & \frac{1}{2}\left[m_f(x,r+t)+m_f(x,r-t)\right]+\frac{t}{2r}\left(m_f(x,r+t)-m_f(x,r-t)\right) \\
= \quad & \frac{1}{2}\left[m_f(x,r+t)+m_f(x,t-r)\right]+\frac{\left[m_f(x,r+t)-m_f(x,t-r)\right]}{2r}.
\end{aligned}
$$

El primer término de esta identidad converge a $m_f(x,t)$ mientras que el segundo tiene como límite $t\partial_t m_f(x,t)$.

Por otra parte,

$$
\frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} s m_g(x,s)ds = \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} s m_g(x,s)ds \xrightarrow{r\to 0} t m_g(x,t).
$$

Obtenemos así la identidad (17.26) de manera más explícita se deduce que

$$
u(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t} g(y)d\sigma(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|x-y|=t} f(y)d\sigma(y)\right). \tag{17.27}
$$

Esta fórmula indica que:

- El dominio de dependencia del punto (x,t) es la corteza esférica $\mid y-x \mid = t$.
- La región de influencia del punto x_0 en $t=0$ es el cono de luz $\mid x-x_0 \mid = \mid t \mid$.

Esta fórmula pone también de manifiesto otras propiedades importantes que hacen que la naturaleza de la solución en dimensión $n=3$ no sea del todo coincidente con la de solución en dimensión $n=1$. En efecto, el hecho de que en (17.27) haya términos como la media de f sobre la corteza esférica hacen que las irregularidades de f puedan "enfocarse" en un punto, aumentando la irregularidad de la solución en conjuntos menores denominados "caústicas". Este el fenómeno conocido como "focussing". En particular, la solución puede incluso perder un orden de diferenciabilidad pues de las fórmulas anteriores sólo se deduce que si $f\in C^s$ y $g\in C^{s-1}$ entonces $u\in C^{s-1}$ y $u_t\in C^{s-2}$.

Otra propiedad interesante es que cuando los datos iniciales son de soporte compacto, si bien el soporte de la solución se expande, su valor máximo decrece domo $1/t$.

Por último, de la fórmula (17.27) se deduce que una perturbación inicial producida en el instante $t=0$ en el punto $x_0\in\mathbb{R}^3$ sólo se percibe por la solución en la superficie del cono $\mid x-x_0 \mid = \mid t \mid$. Esto significa en particular que para todo $y\in\mathbb{R}^3$ sólo existe un instante de tiempo en que esa perturbación es percibida, el instante $t_0 = \mid y-x_0 \mid$. Este hecho se conoce como fenómeno del Huygens. Este hecho es de gran importancia en nuestra vida cotidiana. En la medida en que la ecuación de ondas $3-d$ es un modelo para la propagación de las ondas acústicas, esto implica que los sonidos del pasado sólo los percibimos una vez.

Conviene subrayar que ésto no ocurre en $1-d$. En efecto, la fórmula de d'Alembert hace que la solución en (x,t) dependa del valor inicial de la velocidad en todo el intervalo $[x-t,\, x+t]$. De modo que, en $1-d$, cuando una perturbación inicial alcanza el punto espacial perturba su dinámida en todos los instantes futuros.

17.4 Dimensión $n = 2$. El método del descenso de Hadamard

Consideremos ahora la ecuación de ondas en dos dimensiones espaciales:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2,\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\, u_t(x,0) = g(x),\, x \in \mathbb{R}^2. \end{array}\right. \tag{17.28}$$

En esta ocasión $x = (x_1,\, x_2)$.

Ahora bien la solución $u = u(x_1,\, x_2,\, t)$ puede también considerarse como una solución de la ecuación de ondas en $3-d$ que es independiente de la tercera variable espacial x_3. Esta es la idea que inspira el método del descenso de Hadamard. Aplicamos entonces la fórmula (17.27) en el punto $x_3 = 0$ para simplificar la expresión. Explicitando las integrales de superficie de (17.27) obtenemos que

$$u(x_1,\, x_2,\, t) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{r<t} \frac{g(y_1,\, y_2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy,\, dy_2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int\int_{r<t} \frac{f(y_1,\, y_2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dy,\, dy_2 \tag{17.29}$$

donde

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{17.30}$$

Se observa una diferencia sustancial entre la dimensión $n = 2$ y $n = 3$. En dimensión $n = 2$ el dominio de dependencia de la solución es toda la bola $\mid y - x \mid \leqslant t$ mientras que en dimensión $n = 3$ es sólo la corteza esférica. Por otra parte la región de influencia es todo el interior del cono $\mid x - x_0 \mid \leqslant t$. ¡Afortunadamente las ondas acústicas obedecen a la ecuación de ondas en dimensión $n = 3$ y no en dimensión $n = 2$!

18 Comparación de la ecuación de ondas y del calor

Las ecuaciones de ondas y del calor son sin duda dos de los modelos más simples y fundamentales en la teoría de EDP. El análisis anterior de los mismos indica que se trata de modelos con propiedades cualitativas muy distintas o, incluso, contrapuestas. Mencionamos aquí algunas de ellas:

•*Reversibilidad temporal.*

La ecuación de ondas es reversible en tiempo. Basta para ello hacer el cambio de variable temporal $t' = -t$. Se comprueba que el operador de d'Alembert se mantiene invariante por incluir términos en los que sólo aparece un número par de derivadas. Esto no es así en el caso de la ecuación del calor. Por otra parte, la fórmula de d'Alembert para la solución de la ecuación de ondas es también perfectamente reversible en tiempo. En particular, predice que las soluciones son igualmente regulares en el pasado que en el futuro. Esto es exactamente lo contrario de lo que ocurre con la ecuación del calor en la que, a causa de un efecto regularizante sumamente fuerte, basta que el dato inicial sea integrable para que en todos los tiempos $t > 0$ la solución pertenezca a $BC^\infty(\mathbb{R})$.

• *Conservación de energía.*

Las diferencias antes mencionadas se observan también el el comportamiento temporal de la energía de las soluciones.

En efecto mientras que en la ecuación de ondas de energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right] dx$$

se conserva, en la ecuación del calor la energía correspondiente

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

se disipa, tal y como vimos, según la ley

$$\frac{de(t)}{dt} = -\int_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2 \, dx.$$

• *Velocidad infinita de propagación.*

Tal y como vimos, en la ecuación de ondas la velocidad de propagación es finita. Esto queda claramente de manifiesto en la fórmula de d'Alembert para la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

De esta fórmula se deduce que el valor de la solución en el punto (x,t) depende exclusivamente del valor de los datos iniciales en el intervalo $[x-t,\ x+t]$ denominado dominio de dependencia. Del mismo, el valor de los datos iniciales en el punto x_0 en el instante $t = 0$ se perciben exclusivamente en el cono: $\mid x - x_0 \mid \leqslant t$, denominado *región de influencia*.

Estos dos hechos confirman que la velocidad de propagación en la ecuación de ondas considerada es de hecho la unidad.

Sin embargo, en la ecuación del calor, el hecho de que la solución fundamental o núcleo de Gauss $\mathcal{G}$ sea estrictamente positivo en todos los puntos hace que la velocidad de propagación sea infinita de modo que una perturbación del dato inicial en cualquier punto es instantáneamente percibida en todos los puntos de la recta real.

19 Resolución de sistemas lineales mediante el Método Directo del Cálculo de Variables (MDCV)

En esta sección vamos a ilustrar un modo simple de resolver sistemas lineales de la forma

$$Ax + b \tag{19.1}$$

mediante un método inspirado en el Cálculo de Variaciones, el denominado *Método Directo del Cálculo de Variaciones* (MDCV).

El método está basado en la simple constatación en el ámbito del análisis de funciones reales de una variable real según lo cual

$$f(x) = 0 \tag{19.2}$$

si y sólo si

$$F'(x) = 0 \tag{19.3}$$

siendo F una positiva de f. En vista de este hecho cualquier punto crítico de la función F es solución de la ecuación (19.2). En particular, si F admite un máximo o un mínimo local, éste constituye una solución de (19.2).

Hay un caso en el que es particularmente fácil probar que F admite un punto crítico. Esto ocurre por ejemplo cuando

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es continua,} \tag{19.4}$$

$$\text{y, coerciva, i. e. } \lim_{|x| \to \infty} F(x) = \infty \tag{19.5}$$

Bajo estas dos hipótesis es fácil probar que el mínimo de F se alcanza. La demostración nos conduce al MDCV. Procedemos en varias etapas:

Etapa 1. Definimos el ínfimo

$$I = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x). \tag{19.6}$$

De (19.4) y (19.5) se deduce que $I > -\infty$.

Etapa 2. Construimos una *sucesión minimizante* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$F(x_n) \downarrow I,\ n \to \infty. \tag{19.7}$$

Esta sucesión existe por la propia definición de ínfimo.

Etapa 3. En vista de (19.5) se deduce inmediatamente que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales.

Etapa 4. Como (x_n) es una sucesión acotada de números reales, admite una subsucesión convergente, i.e.

$$x_{n'} \to x, \text{ si } n' \to \infty. \tag{19.8}$$

Etapa 5. Como la función F es continua tendremos entonces

$$F(x_{n'}) \to F(x),\, n' \to \infty. \tag{19.9}$$

En vista de (19.7) y (19.9) tenemos

$$F(x) = I. \tag{19.10}$$

Esto demuestra que el mínimo de F se alcanza en todo punto de acumulación de cualquier sucesión minimizante.

Conviene ahora analizar qué hipótesis ha de satisfacer f para que F esté en las condiciones de aplicar el MDCV.

Si f es continuo, su primitiva F es de clase C^1 por lo que (19.4) se cumple.

Por otra parte, si f es creciente su primitiva es convexa.

La condición (19.5) se cumple entonces, por ejemplo si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty. \tag{19.11}$$

En efecto, en este caso tenemos

$$\int_1^\infty f(x)dx = +\infty; \ \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = -\infty \tag{19.12}$$

y la primitiva

$$F(x) = \int_0^x f(\sigma)d\sigma \tag{19.13}$$

es tal que se verifican las hipótesis (19.4) y (19.5).

A la hora de analizar el sistema de ecuaciones (19.1), la primera condición que se nos presenta es que (19.1) sea un sistema gradiente. Esto ocurre si y sólo si

$$\text{la matriz } A \text{ es simétrica.} \tag{19.14}$$

En este caso, la función

$$F(x) = \frac{1}{2}(ax,\, x) - (b, x) \tag{19.15}$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto euclídeo en $\mathbb{R}^n$ es tal que

$$\nabla F(x) = 0 \Leftrightarrow x \text{ es solución de (19.1).} \tag{19.16}$$

Con el objeto de aplicar el MDCV hemos de asegurarnos de que la propiedad de coercividad (19.5) se cumple. Esto ocurre cuando la matriz A es definida positiva, i.e. cuando existe $\alpha > 0$ tal que

$$(Ax,\, x) \geqslant \alpha \mid x \mid^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{19.17}$$

En este caso tenemos efectivamente que

$$F(x) \geqslant \frac{\alpha}{2} \mid x \mid^2 -(b, x) \geqslant \frac{\alpha}{2} \mid x \mid^2 - \mid b \mid \mid x \mid \to \infty,\ \mid x \mid \to \infty \tag{19.18}$$

de donde se deduce la propiedad de coercividad (19.5).

Obviamos cuando A es simétrica y definida positiva la matriz A es también inversible de modo que la solución de (19.1) existe, es única y viene dada por

$$x = A^{-1}b. \tag{19.19}$$

Acabamos de ver que el MDCV proporciona un método para el cálculo de dicha solución que no necesita de la expresión de A^{-1}.

En el caso considerado la función F considerada es cuadrática, estrictamente convexa y el mínimo global de F obtenido es el único punto fijo crítico de esta función.

Buena parte de la teoría moderna de resolución de EDP está basada en estas ideas desarrolladas para resolver, en primer lugar, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

Pero hay un punto fundamental por el que, tal y como lo hemos presentado, el MDCV no puede ser aplicado en este contexto. Se trata del hecho que, si bien en el espacio euclideo toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente, esto no ocurre en espacios de dimensión infinita como son los espacios de funciones que surgen de manera natural en el estudio de las EDP.

20 Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert $(H, \| \cdot \|_H)$ es un espacio de Banach cuya norma proviene de un producto escalar $(\cdot, \cdot)_H$, i.e.

$$\| h \|_H^2 = (h,\, h)_H. \tag{20.1}$$

El espacio de Hilbert con el que estamos más familiarizados es el espacio $\mathbb{R}^N$ dotado de la norma euclídea. Se trata de un espacio de dimensión finita N.

Otro de los ejemplos más naturales es el espacio ℓ^2 de las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid^2 < \infty \right\}. \tag{20.2}$$

El espacio ℓ^2 dotado de la norma canónica

$$\left\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid^2\right]^{1/2} \tag{20.3}$$

es un espacio de Hilbert.

Se trata en este caso de un espacio de dimensión infinita.

Con el objeto de simplificar la notación y subrayar la analogía de este espacio con el espacio finito-dimensional $\mathbb{R}^N$ sus elementos serán denotados mediante la notación vectorial habitual $\vec{a} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

No es difícil comprobar que en el espacio ℓ^2 falla una de las propiedades fundamentales del espacio euclideo finito-dimensional como es que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. en efecto, consideremos la sucesión ℓ^2 constituida por los elementos de la base canónica $\{\vec{e}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde $\vec{e}_j$ es el elemento de ℓ^2 tal que $e_{j,k} = \delta_{jk}$, donde δ_{jk} denota la delta de Kronecker. Obviamente $\| \vec{e}_j \|_{\ell^2}= 1$ para todo $j \geqslant 1$, de modo que cada $\vec{e}_j$ pertenece a la esfera unidad de ℓ^2. Se trata por tanto de una sucesión acotada en ℓ^2. Por otra parte $\| \vec{e}_j - \vec{e}_k \|_{\ell^2}= 1$ cuando $j \neq k$. Por lo tanto, $\{\vec{e}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ no puede poseer ninguna subsucesión de Cauchy y por consiguiente ninguna subsucesión convergente.

Sin embargo y, a pesar de que $\{\vec{e}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ no admite ninguna subsucesión convergente, es obvio que $e_{j,k} \to 0$ cuando $j \to \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es decir, cada una de las componentes de los elementos de ℓ^2 tiende a cero cuando $j \to \infty$.

En este ejemplo se observa el impacto de la dimensión infinita. En efecto, mientras que en $\mathbb{R}^N$ la convergencia equivale a la convergencia de cada una de las componentes, esto no es así en ℓ^2 puesto que mientras que cada una de las componentes converge no se produce la convergencia en norma en ℓ^2.

Este ejemplo conduce a la siguiente noción de *convergencia débil*:

Definición (convergencia débil). Una sucesión $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un espacio de Hilbert H se dice que converge débilmente a $h \in H$ si y sólo si

$$(h_j,\, g)_H \to (h,\, g),\ \forall g \in H. \tag{20.4}$$

Cuando esto ocurre lo denotaremos mediante

$$h_j \rightharpoonup h \text{ en } H. \tag{20.5}$$

En el ejemplo anterior se observa que la sucesión $\{\vec{e}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a cero en ℓ^2.

En el siguiente teorema se establecen algunas de las propiedades más importantes de la convergencia débil y de su relación con la convergencia en norma, también denominada convergencia fuerte.

Teorema. *Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *Si* $h_j \to h$ *en* H *entonces* $h_j \rightharpoonup h$ *débilmente en* H.

b) *Si* $h_j \rightharpoonup h$ *en* H *y* $\| h_j \|_H \to \| h \|_H$ *entonces* $h_j \to h$ *en* H.

c) *Si* $h_j \rightharpoonup h$ *débilmente en* H *entonces*

$$\| h \|_H \leqslant \liminf_{j\to\infty} \| h_j \|_H \ . \tag{20.6}$$

En este Teorema se señala que:

- La convergencia en norma implica la convergencia débil.
- La convergencia en norma equivale a la combinación de la convergencia débil y de la convergencia de las normas.
- La norma $\| \cdot \|_H$ es semicontinua inferiormente (s.c.i.) con respecto a la convergencia débil.

Desarrollamos brevemente la demostración del Teorema:

Demostración.

a) Basta observar que, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|(h_j,\, g)_H - (h,\, g)_H| = |(h_j - h,\, g)_H| \leqslant \| h_j - h \|_H \| g \|_H \to 0,\ j \to \infty.$$

b) Gracias a que la norma en un espacio de Hilbert proviene del producto escalar asociado tenemos que:

$$\| h_j - h \|_H^2 = (h_j - h,\, h_j - h)_H = (h_j,\, h_j)_H - 2(h_j,\, h)_H + (h,\, h)_H = \| h_j \|_H^2 - 2(h_j,\, h)_H + \| h \|_H^2 \ .$$

Usando la convergencia de las normas y la convergencia débil deducimos que

$$\| h_j - h \|_H^2 = (h_j - h,\, h_j - h)_H \to \| h \|_H^2 - 2 \| h \|_H^2 + \| h \|_H^2 = 0.$$

c)

$$\| h \|_H^2 = (h,\, h)_H = \lim_{j\to\infty} (h_j,\, h)_H.$$

Por otra parte,

$$| (h_j,\, h)_H | \leqslant \| h_j \|_H \| h \|_H \ .$$

Por consiguiente,

$$\| h \|_H^2 = \lim_{j\to\infty} | (h_j,\, h)_H | \leqslant \liminf_{j\to\infty} \| h_j \|_H \| h \|_H$$

y por tanto (20.6) se cumple. ∎

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes para garantizar la continuidad de una función.

Teorema. *Sea* $J : H \to \mathbb{R}$ *una función en un espacio de Hilbert que satisfaga las dos propiedades siguientes:*

- *J es continua.*
- *J es convexa.*

Entonces, J es semicontinua inferiormente con respecto a la toplogía débil, es decir

$$J(h) \leqslant \liminf_{j\to\infty} J(h_j) \tag{20.7}$$

cuando $h_j \rightharpoonup h$.

Este teorema establece una relación que, de entrada, puede resultar sorprendente entre la convexidad de una función y su continuidad con respecto a la convergencia débil. Un análisis un poco más cuidadoso permite entender esta conexión.

En efecto, si $J : H \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces, gracias al teorema de Hahn-Banch (ver Tma. III.7 de [1]) [18]

$$J(h) = \sup_{\substack{\ell \in \mathcal{L}(H,\,\mathbb{R})\\ \ell \leqslant J}} \ell(h) \tag{20.8}$$

Es decir, como J es convexa, J es el supremo de las funciones lineales y continuas que están dominadas por J en el sentido que $\ell(h) \leqslant J(h)$ para cada $h \in H$.

Esta caracterización permite probar la continuidad con respecto a la topología débil a partir de la continuidad en norma. En efecto: Si $h_j \to h$ y $\ell \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ se tiene

$$\ell(h_j) \to \ell(h),\ j \to \infty. \tag{20.9}$$

Por otra parte, en vista de (20.8), para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell_\varepsilon \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ tal que

$$\ell_\varepsilon(h) \geqslant J(h) - \varepsilon. \tag{20.10}$$

Combinando (20.8)-(20.10) se obtiene

$$J(h) \leqslant \ell_\varepsilon(h) + \varepsilon = \lim_{j\to\infty} \ell_\varepsilon(h_j) + \varepsilon \leqslant \liminf_{j\to\infty} J(h_j) + \varepsilon. \tag{20.11}$$

De aquí se deduce (20.7) de manera inmediata.

∎

Se precisa aún una nueva herramienta para poder aplicar el MDCV en el contexto de los espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Teorema. *En un espacio de Hilbert toda sucesión acotada posee una subsucesión que converge débilmente.*

El ejemplo del espacio de Hilbert ℓ^2 proporciona un excelente caso particular para explorar una posible demostración de este Teorema. Analicémoslo.

[18] Aquí y en lo sucesivo $\mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ denota el espacio de las funciones lineales y continuas de H en $\mathbb{R}$.

Consideremos una sucesión acotada $\{\vec{a}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en ℓ^2.

Bajo estas condiciones $\{a_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N}}$ constituye una sucesión acotada de números reales para cada k. Por lo tanto, para cada $k\in\mathbb{N}$, existe una subsucesión convergente. Sin embargo, para garantizar la existencia de una subsucesión que converge débilmente hemos de aplicar el procedimiento de extracción diagonal de Cantor. Esto nos permite efectivamente asegurar la existencia de una subsucesión j' tal que

$$a_{j',k} \rightharpoonup a_k,\ j'\to\infty \tag{20.12}$$

para cada $k\in\mathbb{N}$.

La propiedad (20.12) equivale a la convergencia débil en el espacio ℓ^2. En efecto, debemos comprobar que, para cada $\vec{g}\in\ell^2$,

$$(\vec{a}_{j'},\,\vec{g})_{\ell^2}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{j',k}g_k\to\sum_{k=1}^{\infty}a_kg_k=(\vec{a},\,\vec{g})_{\ell^2}. \tag{20.13}$$

De (20.12) es inmediato comprobar que (20.13) se cumple para cada $\vec{g}\in\ell^2$ que sólo tenga un número finito de componentes no nulos.

En el caso de un elemento $\vec{g}\in\ell^2$ general, para cualquier $\varepsilon>0$ existe $\vec{g}_N\in\ell^2$ tal que $\|\ \vec{g}_N-\vec{g}\ \|_{\ell^2}\leqslant\varepsilon$ donde $\vec{g}_N$ denota la sucesión truncada en la que los primeros N términos son los de $\vec{g}$ y los demás son nulos. Entonces

$$\left|(\vec{a}_{j'},\,\vec{g})_{\ell^2}-(\vec{a},\,\vec{g})_{\ell^2}\right|=\left|(\vec{a}_{j'}-\vec{a},\,\vec{g})_{\ell^2}\right|\leqslant\left|(\vec{a}_{j'}-\vec{a},\,\vec{g}_N)_{\ell^2}\right|+\left|(\vec{a}_{j'}-\vec{a},\,\vec{g}-\vec{g}_N)\right|_{\ell^2}=I^1_{j'}+I^2_{j'}.$$

Como $\vec{g}_N$ sólo tiene un número finito de componentes no nulos se tiene $I^1_{j'}\to 0$ cuando $j'\to\infty$. Por otra parte,

$$I^2_{j'}\leqslant\left|\left|\vec{a}_{j'}-\vec{a}\right|\right|_{\ell^2}\left|\left|\vec{g}-\vec{g}_N\right|\right|_{\ell^2}\leqslant\varepsilon\left|\left|\vec{a}_{j'}-\vec{a}\right|\right|_{\ell^2}.$$

El resultado se deduce entonces del hecho de $\{\vec{a}_{j'}-\vec{a}\}_{j'}$ es una sucesión acotada de ℓ^2. Esto se deduce de las dos siguientes observaciones:

- $\{\vec{a}_{j'}\}_{j'}$ es una sucesión acotada de ℓ^2.

Esto se deduce del hecho de que toda sucesión que converge débilmente en ℓ^2 está acotada en ℓ^2, lo cual es consecuencia del principio de la acotación uniforme[19] y del Teorema de representación de Riesz-Fréchet [20] que garantiza que $\mathcal{L}(H;\mathbb{R})$ es isométrico al propio espacio H.

[19] El principio de la acotación uniforme o Teorema de Banach-Steinhaus garantiza que si $\{T_j\}$ es una familia de operadores lineales acotados entre dos espacios de Banach E y F tal que T_jx está acotada en F para cada x de E, entonces la familia $\{T_j\}$ está acotada en $\mathcal{L}(E,F)$ (véase Tma. II.1 de [1]) .

[20] El Teorema de representación de Riesz-Fréchet ([1], Tma. IV.11) garantiza que para cada elemento T del dual H' de un espacio de Hilbert H existe un único elemento g de H tal que $<T,h>=(g,h)_H$ para cada h en H.

Bibliografía

[1] BREZIS, H. *Análisis funcional,* Alianza Universidad, Madrid 1984.

[2] CASAS E., *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Universidad de Cantabria, 1992.

[3] EVANS, L. G., *Partial Differential Equations,* G.S.M. Volumen 19, American Mathematical Society, 1998

[4] FOLLAND, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations,* Princeton University Press, 1976.

[5] JOHN, F., *Partial Differential Equations,* 4 ed. Applied Math. Scs, n§ 1, Springer-Verlag, 1982.

[6] PERAL, I. *Primer curso de EDP,* página WEB del Departamento de Matemáticas, U.A.M. 2001.

[7] STRAUSS, W. *Partial Differential Equations, An Introduction,* John Wiley & Sons, 1992.

21 Ejercicios

21.1 Problema de Cauchy y teorema de Cauchy-Kovalevskaya

Problema 1.

Consideramos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad x \in I\!R\,,\, t \in I\!R \tag{1}$$

con datos iniciales en $t = 0$:

$$u(x,0) = e^x, u_t(x,0) = 0, \quad x \in I\!R^n. \tag{2}$$

1. Aplicando el Teorema de Cauchy-Kowalewskaya demostrar que existe un entorno de $I\!R \times \{0\}$ en $I\!R^2$ en el que (1)-(2) admite una única solución analítica real.

2. Buscamos una expresión de la solución de la forma

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k.$$

   Identificar los coeficientes (dependientes de x)$f_k(x)$ de esta serie.

3. Estudiar la convergencia de esta serie y comprobar que define una función analítica real en un entorno de $I\!R \times \{0\}$ en $I\!R^2$.

4. Analizar estas mismas cuestiones en el caso multidimensional

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = \Delta_x u + u \ , \ x \in I\!R^n \ , \ t \in I\!R \\ u(x,0) = e^{x_1+\ldots+x_n} \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , \ x \in I\!R^n \end{array}\right. \tag{3}$$

con $n \geq 2$.

Problema 2.

Sea $u = u(x,y)$ una solución de la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Hacemos el cambio a las coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta. \end{array}\right.$$

Prescribimos datos de Cauchy en la circunferencia unidad:

$$u = f(\theta), \frac{\partial u}{\partial r} = g(\theta) \text{ si } r = 1, \tag{2}$$

siendo f y g funciones analíticas reales y de período 2π con respecto al ángulo θ.

(A) Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que el sistema (1)-(2) admite una y sólo una solución analítica real u en el conjunto

$$\{(\theta, r) : \theta \in [0, 2\pi], | \, r - 1 \, | < \varepsilon\}.$$

(B) Explica la importancia de que la circunferencia unidad sea compacta a la hora de responder a la primera cuestión (A).

(C) ¿Se puede asegurar que para $1 - \varepsilon < r < 1$, la solución $u(r,\theta)$ obtenida es períodica de período 2π con respecto a θ? Razonar la respuesta.

(D) Consideramos ahora el caso particular en que f y g son polinomios trigonométricos

$$f(\theta) = \sum_{\substack{|n|\leq k \\ n\in Z}} a_n \operatorname{sen} n\theta$$

$$g(\theta) = \sum_{\substack{|n|\leq k \\ n\in Z}} b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Construir explícitamente una solución de (1) y (2) en este caso particular.

Indicación: Utilizar soluciones especiales de la forma $e^{\pm in\theta} r^n$ y $e^{\pm in\theta} r^{-n}$

(E) Probar que la solución obtenida en el apartado anterior define una función analítica en el plano $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen, i.e. en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(F) Supongamos ahora que

$$f(\theta) = \sum_{n\in Z} a_n \operatorname{sen} n\theta\,;\; g(\theta) = \sum_{n\in Z} b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Es decir, consideramos datos de Cauchy que involucran infinitos modos de Fourier. Probar que bajo una condición de crecimiento del tipo

$$| a_n | + | b_n | \leq Ce^{-|n|^2}\ ,\ \forall n \in Z$$

los datos f y g son funciones analíticas reales y que lo dicho en los apartados (E) y (F) permanece cierto.

Problema 3.

Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0\, en\, R \times (0, \infty); \quad u(x,0) = x^n \tag{1}$$

siendo n un número natural.

a) ¿Se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya? En caso afirmativo indicar el resultado que se obtiene. En caso negativo, explicar cuales de las hipótesis de este Teorema no se cumplen.

b) Encontrar una solucion $u(x,t) = p(x,t)$, siendo p un polinomio homogéneo de grado n en las variables x y $t^{1/2}$.

c) Comparar los resultados de los dos apartados anteriores y justificar su compatibilidad. Comprobar en particular la analiticidad de la solución obtenida en el apartado b).

d) Indicar como se puede calcular la solución de (1) utilizando la transformada de Fourier y gracias a que

$$u = K * x^n \tag{2}$$

siendo $K = K(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor.

[Nota: En la fórmula (2) mediante * se indica la convolución en la variable espacial x. Conviene recordar que $K(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} exp(-x^2/4t)$.]

e) ¿Cual es el comportamiento de la solución para $t > 0$ fijo cuando $|x|$ tiende a infinito?

f) ¿Y el comportamiento de la solución para x fijo cuando t tiende a infinito?

Problema 4.

Consideramos la función

$$u = u(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) \tag{1}$$

de $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ en $\mathbb{R}$.

A. Comprueba que

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \text{ (Ecuación del calor)} \tag{2}$$

B. Comprueba que

$$\begin{aligned} &u(x,t) \to 0 \\ &u_x(x,t) \to 0 \text{ cuando } t \to 0^+ \\ &u_t(x,t) \to 0 \end{aligned}$$

uniformemente en intervalos I cerrados y acotados de $\mathbb{R}_x$ tales que $0 \notin I$.

C. En función de los resultados de los apartados anteriores construye un ejemplo de problema de Cauchy para el operador del calor (2) para el que no se tenga unicidad.

D. Sobre el ejemplo del problema de Cauchy anterior comprueba que existe una infinidad de soluciones analíticas distintas.

E. Apoyándote en el Teorema de Cauchy-Kovalewski deduce que la recta $\{(x,0)\} \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ es característica con respecto al operador del calor (2).

F. Generaliza este ejemplo al caso en que $x \in \mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$.

G. ¿Podrías construir un ejemplo semejante para la siguiente ecuación de Schrödinger

$$iu_t = u_{xx}?$$

Problema 5.

Supongamos que $P(D)$ es un operador diferencial lineal homogéneo de grado m con coeficientes constantes.

Supongamos que $H \subset \mathbb{R}^n$ es un semi-espacio con frontera característica.

A. Construye una solución $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de $P(D)u = 0$ tal que el soporte de u esté contenido en H.

Indicación: Escribe H como $x \cdot \xi \geq 0$ para un cierto vector $\xi \in I\!R^n$ ($\cdot$ denota el producto escalar de $I\!R^n$) y considera soluciones de la forma $u = f(x \cdot \xi)$ con $f : I\!R \to I\!R$.

B. ¿Puede hacerse una construcción semejante de modo que u sea analítica real en $I\!R^n$?.

C. ¿Podrías aplicar esta construcción en el caso del operador de ondas $u_{tt} - 2\Delta u = P(D)u$?

D. ¿Se puede realizar una construcción semejante a la del apartado **A** cuando H es no carcaterística?

Problema 6.

Consideramos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx},\ x \in I\!R,\ t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x),\ x \in I\!R. \end{cases} \tag{21.1}$$

Suponemos que el dato inicial es un polinomio

$$u(x,0) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \tag{21.2}$$

A ¿Podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalewskaya para deducir que (1) con el dato inicial (2) admite una única solución analítica en un entorno de $I\!R_x \times \{0\}$? Razona la respuesta.

B Buscamos una solución de (1) desarrollable en serie de potencias:

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 0, j \geq 0} a_{k,j} x^k t^j. \tag{21.3}$$

Identifica los coeficientes $a_{k,j}$ en función de los coeficientes a_k del polinomio (2).

C ¿Se puede garantizar que para $t > 0$ fijo la serie de potencias converja?

D Comprueba que para $t > 0$ fijo, $u(x,t)$ es un polinomio. ¿Cuál es su orden?

E ¿Se puede decir lo mismo si invertimos el orden de las variables. Es decir, ¿para $x \in I\!R$ fijado, es $u(x,t)$ un polinomio en t? En caso afirmativo, ¿cuál es su orden?

F ¿Se puede calcular de este modo la solución de (1) para $t < 0$?

G Generaliza los resultados de los apartados anteriores al caso bidimensional

$$\begin{cases} u_t = \nu\left(u_{xx} + u_{yy}\right), (x,y) \in I\!R^2, t > 0 \\ u(x,y,0) = u^0(x,y) \end{cases}$$

con

$$u^0(x,y) = \sum_{\substack{1\le k\le N\\ 1\le j\le N}} a_{k,j} x^k y^j.$$

Problema 7.

Consideramos la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0,\ x \in I\!R,\ t > 0. \tag{21.1}$$

(a) Demuestra que si f es de clase $C^1, u(x,t) = f(x-t)$ es solución de (0.1).

Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in I\!R. \end{cases} \tag{21.2}$$

(b) Deduce que si φ analítica (0.2) admite una única solución analítica en un entorno de $t = 0$.

(c) En vista del apartado (a) calcula explícitamente la solución.

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,ax) = \varphi(x), & x \in I\!R. \end{cases} \tag{21.3}$$

siendo a una constante no nula.

(d) ¿Para que valores de a la recta $t = ax$ es característica?

Calcula explícitamente la solución de (0.3) siempre que $a \neq 0$ sea tal que la recta $t = ax$ no sea característica.

(f) Responde a las cuestiones (c)-(d) en el sistema

$$\begin{cases} u_t + a(x)u_x = 0, & x \in I\!R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in I\!R \end{cases} \tag{21.4}$$

siendo $a = a(x)$ una función analítica tal que existen constantes positivas $\beta > \alpha > 0$ tales que

$$\alpha \le a(x) \le \beta,\ \forall x \in I\!R.$$

Problema 8. Consideramos los siguientes operadores diferenciales en $I\!R^2$:

(a) ∂_t; (b) ∂_x; (c) $\partial_t\partial_x$; (d) $\partial_t^2 + \partial_t\partial_x$; (e) $\partial_t^2 + \partial_t\partial_x + \partial_x^2$; (f) $\partial_t^2 + \partial_x^2$.

1.- Calcular todas las rectas características de cada uno de los operadores.

Supongamos ahora que $u = u(x, t)$ es una función solución de la ecuación

$$P(D)u = 0$$

en todo el plano $I\!R^2$, siendo $P(D)$ cualquiera de los operadores anteriores. Supongamos asimismo que $u = 0$ es el rectángulo $a < x < b$, $t_1 < t < t_2$.

2.- Dar la expresión analítica y gráfica del abierto maximal de $I\!R^2$ en el que podemos garantizar que $u \equiv 0$, mediante el Teorema de Holmgren.

3.- Justificar la optimalidad del resultado del apartado anterior en función de las expresiones de 1.- para las rectas características.

Problema 9. Aplica el método de Cauchy y obtén el desarrollo en serie de potencias de las soluciones de la ecuación de segundo orden

$$x'' + a(t)x = b(t).$$

Calcula la fórmula de recurrencia de los coeficientes.

Problema 10. Comprueba que el método de Cauchy puede también ser aplicado en algunas ecuaciones no-lineales, como por ejemplo

$$x' + x^2 = b(t).$$

¿En el caso general de una ecuación no-lineal de la forma

$$x' + f(x) = b(t)$$

cuál es la hipótesis necesaria sobre la función no-lineal f para que el método de Cauchy pueda ser aplicado?

Problema 11. Consideramos la ecuación diferencial:

$$x' = x^3.$$

- Resuelve explícitamente la ecuación.
- Comprueba que existen datos iniciales para los que el tiempo máximo de existencia no es infinito, es decir, se produce explosión en tiempo finito.
- Calcula explícitamente el tiempo de explosión.

- Observa que la no-linealidad cúbica del segundo miembro de la ecuación es un polinomio y por tanto una función analítica. ¿Existe alguna incompatibilidad entre la aplicabilidad del método de Cauchy y el que las soluciones exploten en tiempo finito?

Problema 12. Consideremos nuevamente la ecuación no lineal

$$\begin{cases} x' + f(x) = b(t), \quad t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

siendo $f = f(x)$ y $b = b(t)$ funciones analíticas.

El método de Cauchy garantiza la existencia de una única solución analítica.

Pero el resultado de unicidad de la solución se verifica en una clase mucho más amplia, digamos en la clase de funciones de clase C^1. ¿Existe alguna contradicción entre esos dos hechos?

Problema 13. Consideramos la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

Analiza cuáles de los siguientes problemas de Cauchy entran en el marco del Teorema de Cauchy-Kovalevskaya y cuáles no.

Razona la respuesta.

a) $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = g(t)$, $t > 0$;

c) $u = f$, $u_x = g$, sobre la recta $x = t$.

Problema 14. Analiza el mismo problema en el caso de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Problema 15. Utilizando la fórmula de d'Alembert comprueba que, cuando f y g son funciones analíticas en toda la recta real $\mathbb{R}$, el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admite una solución analítica definida en todo el plano.

Deduce por tanto, en este caso, la solución que el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya proporciona no es local sino global.

Problema 16. Calcula las rectas características de las ecuaciones:

(a) Ecuación de Airy: $u_t + u_{xxx} = 0$.

(b) Ecuación de la viga: $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.

(c) Ecuación de la viga con término de inercia de rotación:

$$u_{tt} - \gamma u_{xxtt} + u_{xxxx} = 0$$

.

(d) Ecuación del telégrafo: $u_{tt} - u_{xx} + du_t = 0$.

Problema 17. Calcula los planos característicos a las ecuaciones siguientes:

(a) Ecuación de placas: $u_{tt} + \Delta^2 u = 0$,

(b) Ecuación de placas con inercia de rotación:

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \Delta^2 u = 0.$$

(c) Ecuación de convección-difusión:

$$u_t - \Delta u + \partial_x u = 0.$$

Problema 18. *Ejemplo de Hadamard.*
Consideramos la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2,$$

y el problema de Cauchy asociado con datos

$$u = 0,\ u_y = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx), \text{ en } y = 0.$$

a) Demuestra que la solución correspondiente es

$$u = \frac{1}{n^2}\operatorname{sen}(nx)\text{senh(ny)}.$$

b) ¿Qué se puede decir de la aplicación que a los datos de Cauchy $(u,\, u_y)$ en $y = 0$ asocia la solución sobre la recta $y = 1$?

21.2 La ecuación del calor

Problema 1.

Estudiamos la ecuación del calor

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + c\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 & \text{en } I\!R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{en } I\!R^n \end{cases}$$

siendo a una constante real y φ una función continua y acotada de $I\!R^n$.

1. Comprobar que u es solución de (1) si y sólo si

$$v(x_1, \cdots, x_n, t) = u(x_1 + ct, x_2, \cdots, x_n, t)$$

resuelve

$$(2)\qquad \begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } I\!R^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

2. Utilizando el apartado anterior construir la solución fundamental $K_c(x,t)$ de (1) tal que la única solución de (1) que satisface

$$| u(x,t) | \leq Ae^{C|x|^2}, \forall (x,t) \in I\!R^n \times (0,\infty)$$

sea de la forma

$$u = K_c * \varphi.$$

3. Utilizar un cambio de variables semejante al del apartado 2 para construir la solución de

$$(3)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & \text{en } I\!R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Problema 2. Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ en } I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ en } I\!R \end{cases}$$

con dato inicial

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

1. Probar que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right]$$

con ϕ la función error

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt$$

es la única solución de este sistema.

2. Obtener esta expresión de u a partir de la fórmula general de la solución

$$u = G(t) * f$$

siendo G el núcleo del calor unidimensional.

3. ¿Cuánto valen los límites

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} u(x,t)$$

para cada $t > 0$ fijo?.

4. Dibujar la gráfica del dato inicial y de la solución u en el instante $t = 1$.

5. Describir la evolución del "frente"

$$\left\{x \in \mathbb{R} : u(x,t) = \frac{1}{2}\right\}$$

cuando $t \to \infty$.

6. ¿Podrías describir en un par de frases el efecto que la evolución de la ecuación del calor produce sobre este dato inicial?

Problema 3. Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- Utilizando la separación de variables, comprueba que la Gaussiana

$$\mathcal{G}(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp\left(\frac{-\mid x\mid^2}{4t}\right),$$

es solución de la ecuación

$$\mathcal{G}_t - \Delta\mathcal{G} = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Indicación: Observa que

$$\mathcal{G}(x,t) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{G}_1(x_j, t)$$

donde $\mathcal{G}_1$ es la Gaussiana unidimensional

$$\mathcal{G}_1(s,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-s^2/4t).$$

- Verifica que cuando $t \to 0$, $\mathcal{G}(\cdot, t)$ constituye una aproximación de la identidad de modo que
$$\mathcal{G}(\cdot, t) \rightharpoonup \delta_0,\ t \to 0^+$$
en el sentido de las medidas, es decir,
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(x,t)\varphi(x)dx \to \varphi(0),\ t \to 0^+$$
para toda $\varphi \in BC(\mathbb{R}^n)$.

- Demuestra que, para cualquier dato $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
$$u = \mathcal{G} * f$$
es una solución del problema de valores iniciales.

Problema 4. Consideramos la ecuación de convección-difusión

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \varepsilon u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{21.5}$$

- Utilizando el cambio de variable
$$v(x,t) = u(x+t,\ t) \tag{21.6}$$
comprueba que el sistema (21.5) puede reducirse al siguiente:
$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t - \varepsilon v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{21.7}$$

- Comprueba que v verifica esta ecuación si y sólo si
$$w(x,t) = v(x, t/\varepsilon) \tag{21.8}$$
verifica
$$\left\{ \begin{array}{ll} w_t - w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ w(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{21.9}$$

- A partir de la expresión explícita de la solución de (21.9) por convolución con el núcleo de Gauss obtén una representación explícita de la solución de (21.5).

- Comprueba en la expresión obtenida que la solución $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ de (21.5) es tal que

$$u_\varepsilon(x,t) \to z(x,t) = f(x,t) \tag{21.10}$$

  para todo $t > 0$ y para casi todo $x \in \mathbb{R}$ bajo la hipótesis de que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- Observa que la función $z = z(x,t)$ obtenida en el proceso de paso el límite (21.10) es solución de

$$\begin{cases} z_t + z_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ z(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{21.11}$$

- Comenta el resultado en base a la estructura de la ecuación inicial (21.5).

Problema 5.

Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \ \text{ en } \ I\!R \times (0,\infty); \quad u(x,0) = u_0(x) \ \text{ en } \ I\!R. \tag{1}$$

a) ¿Se trata de un problema de Cauchy en el que se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya? En caso afirmativo indicar el resultado que se obtiene. En caso negativo, explicar cuáles de las hipótesis de este Teorema no se cumplen. Verificar en detalle si la recta $t = 0$ sobre la que se dan los datos inicial es característica.

b) En el caso de un dato inicial de la forma $u_0(x) = x^n$, siendo n un número natural, encontrar una solución de la forma $u(x,t) = p(x,t)$, siendo p un polinomio de grado n en las variables x y $t^{1/2}$.

Comprobar que se trata de un polinomio homogéneo de grado n en las variables x y $t^{1/2}$.

Deducir la expresión de la solución cuando el dato inicial es un polinomio general

$$u(x,0) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

c) Comparar los resultados de los dos apartados anteriores y justificar su compatibilidad. Comprobar en particular la analiticidad de la solución obtenida en el apartado b).

d) Comprobar que la solución del caso $u_0(x) = x^n$ se puede calcular utilizando su expresión por convolución $u = G * x^n$ con la solución fundamental gaussiana $G = G(x,t)$ de la ecuación del calor

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\left(-|x|^2/4t\right).$$

Solución:

$\boxed{\text{a}}$ La ecuación

$$\begin{cases} u_t - u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,\, 0) = \varphi, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

es característica puesto que la recta $\{t = 0\}$ sobre la que se prescriben los datos iniciales lo es con respecto al operador del calor. En efecto el símbolo del operador del calor es

$$P = i\tau + \xi^2$$

y su parte principal

$$P_p(\xi,\, \tau) = \xi^2.$$

Los ceros de P_p son pues de la forma $(0,\, \tau)$. Como éstos son los vectores normales a las rectas características deducimos que $\{t = 0\}$ lo es.

Como consecuencia de este hecho el Teorema de C-K no puede aplicarse en este caso.

De hecho el problema de valores iniciales considerado sólo posee un dato inicial y no dos como corresponde a un problema de Cauchy para un operador de orden 2.

Es fácil comprobar de hecho que el dato $u(x,\, 0) = \varphi(x)$ junto con la ecuación del calor determinan la derivada normal:

$$u_t(x,\, 0) = u_{xx}(x,\, 0) = \varphi''(x).$$

$\boxed{\text{b}}$ Consideramos el caso particular $\varphi(x) = x^n$ y buscamos una solución de la forma

$$u = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \sqrt{t} + \cdots + a_1 x \left(\sqrt{t}\right)^{n-1} + a_0 \left(\sqrt{t}\right)^n.$$

Tomando valores en $t = 0$ obtenemos $a_n = 1$.

Por otra parte

$$u_{xx} = n(n-1)x^{n-2} + a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3}\sqrt{t} + \cdots + 2a_2 \left(\sqrt{t}\right)^{n-2},$$

y

$$\begin{aligned} u_t = & \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{2\sqrt{t}} + a_{n-2}x^{n-2} + \frac{3a_{n-3}x^{n-3}}{2}\sqrt{t} \\ & + \cdots a_1 \times \frac{(n-1)}{2}\left(\sqrt{t}\right)^{n-3} + \frac{a_0 n}{2}\left(\sqrt{t}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Igualando potencias vemos que:

- $a_{n-1} = 0$
- $a_{n-2} = n(n-1)$
- $a_{n-3} = 0$

- $a_{n-4} = \cdots$

Comprobamos de este modo que la mitad de los términos se anulan y sólo persisten las potencias pares de $\sqrt{t}$.

Vemos pues que la solución obtenida es un polinomio homogéneo de grado n de x y $\sqrt{t}$ pero que se trata también de un polinomio en las variables x y t y por tanto de una solución analítica.

$\boxed{\text{c}}$ El hecho de que la solución obtenida sea analítica no contradice en absoluto que el Teorema de Cauchy-Kovaleskaya no puede ser aplicado pues este proporciona condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones analíticas pero no condiciones necesarias.

$\boxed{\text{d}}$ La solución obtenida es la misma que puede ser calculada mediante la transformada de Fourier o por convolución con el núcleo de Gauss.

Tenemos

$$u(x,\,t) = [\mathcal{G}(\cdot,\,t) * \varphi](x).$$

En el caso que nos ocupa

$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} y^n dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} (x-y)^n dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-1)^{n-k} y^{n-k} dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} y^{n-k} dy. \end{aligned}$$

Por tanto el cálculo se reduce a evaluar las integrales

$$I_\ell = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} y^\ell dy = \left(2\sqrt{t}\right)^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} z^\ell dz = \left(2\sqrt{t}\right)^{\ell+1} \alpha_\ell$$

donde los números α_ℓ son precisamente:

$$\alpha_\ell = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} z^\ell d\ell.$$

Obviamente $\alpha_\ell = 0$ cuando ℓ es impar.

Cuando ℓ es par la integrando puede reducirse por integración por partes a la ya conocida $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz$ en un número finito de pasos.

La expresión obtenida coincide con la calculada anteriormente. Este segundo método es algo más complicado.

21.3 La ecuación de ondas

Problema 1. Comprueba que mediante el cambio de variables $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ puede escribirse en la forma $u_{\xi\eta} = 0$. Obten la fórmula general para las soluciones de esta ecuación y calcula la que toma los datos $u(\xi, 0) = f(\xi)$, $u(0, \eta) = g(\eta)$.

Problema 2. Consideramos el problema de Cauchy para la siguiente ecuación de ondas no-lineal:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \mid u_t \mid^2 - \mid u_x \mid^2 = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Comprobar formalmente que u resuelve (1) si y sólo si $v = e^u$ satisface

$$(2) \qquad \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v^0(x), v_t(x,0) = v^1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con

$$(3) \qquad v^0 = e^{u^0}, v^1 = e^{u^0} u^1.$$

1. Escribir explícitamente la expresión de la solución v de (2).
2. Deducir una expresión para la solución u de (1) deshaciendo el cambio de variables $v = e^u$.
3. Comprobar que los datos iniciales u^0, u^1 de u están acotados en $\mathbb{R}$ si y sólo si existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que
$$\alpha \leq v^0(x) \leq \beta, \alpha \leq v^1(x) \leq \beta, \forall x \in \mathbb{R}.$$
4. Comprobar que la solución v satisface entonces
$$\alpha \leq v(x,t); \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
y
$$v(x,t) \leq \beta + \beta \mid t \mid, \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
5. Deducir una cota superior para
$$\max_{x \in R} \mid u(x,t) \mid = f(t).$$

Problema 3. Consideramos la ecuación de las ondas elásticas en tres dimensiones espaciales:

$$Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta\right) u(x,t) = 0\ ,\ x \in I\!R^3, t \in I\!R \tag{4}$$

con c_1, c_2 dos constantes distintas.

Estudiamos las soluciones radiales $u = u(r,t)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

1. Comprobar que si u es radial la ecuación (4) se reduce a
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2c_1^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_2^2\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2c_2^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) u(r,t) = 0.$$

2. Probar que $v = ru$ satisface
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) v = 0.$$

3. Deducir que v es necesariamente de la forma:
$$v(r,t) = F_1(r + c_1t) + F_2(r - c_1t) + G_1(r + c_2t) + G_2(r - c_2t)$$
y que por tanto
$$u(r,t) = \frac{1}{r}\left\{F_1(r + c_1t) + F_2(r - c_1t) + G_1(r + c_2t) + G_2(r - c_2t)\right\}. \tag{5}$$

4. ¿Cuántos datos iniciales se necesitan para determinar de manera única una solución radial de (4)? Se entiende que los datos iniciales se toman en $t = 0$ y que por tanto son funciones del radio r.

5. Establecer una relación biunívoca entre los datos iniciales de u y los perfiles F_1, F_2, G_1 y G_2 de la forma general de la solución.

Problema 4. Demuestra la fórmula de conservación de energía de las soluciones de la ecuación de ondas en una dimensión a partir de la fórmula de d'Alembert.

21.4 La ecuación de transporte

1.- * Resolver la ecuación de transporte

$$u_t + cu_x = 0$$

mediante el método de las características para un valor de $c \in \mathbb{R}$ general.

* Consideramos la ecuación de transporte con coeficiente variable $c = c(x)$:

$$u_t + c(x)u_x = 0$$

Suponemos que c es localmente Lipschitz.

Demostrar que para cada dato inicial f continuo y acotado la solución puede definirse mediante el método de las características.

¿Se puede asegurar que existe un tiempo $T > 0$ de modo que la solución esté definida para todo $0 \leq t \leq T$?

Con el objeto de responder a esta pregunta se podrá considerar el caso en que $c(x) = x^3$.

¿Qué ocurre cuando c es globalmente Lipschitz?

¿ Y cuando c deja de ser localmente Lipschitz?

Para analizar esta última cuestión se podrá considerar el caso en que $c(x) = \sqrt{|x|}$.

2.- Resuelve mediante el método de las características la ecuación de transporte

$$u_t + |x|u_x = 0.$$

21.5 Soluciones fundamentales

1.- Consideramos la ecuación de Schrödinger

$$(1) \qquad \begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

a) Utilizando la transformada de Fourier reduce (1) a la resolución de una familia de ecuaciones diferenciales dependientes del parámetro $\xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Calcula la solución fundamental de (1).

c) Comprueba que la solución general de (1) viene dada por

$$(2) \qquad u(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2})} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x-y|^2/4t} f(y) dy.$$

d) Da condiciones sobre el dato inicial f que aseguren que u está bien definida y que constituye, para cada $t > 0$, una función continua de la variable $x \in \mathbb{R}^n$.

e) Comprueba de la expresión (2) que la ecuación (1) genera un grupo de isometrías en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de modo que

$$(3) \qquad \| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \ \forall t > 0.$$

f) Comprueba la misma propiedad mediante el método de la energía multiplicando en (1) por $\bar{u}$ e integrando por partes en $\mathbb{R}^n$.

g) Obtén una estimación sobre la norma de $u(t)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.- Consideramos la ecuación

$$-\Delta u + u = f \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

a) Comprueba que la solución de (1) satisface

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+ \mid \xi \mid^2},\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

b) Demuestra que la solución de (1) es entonces de la forma

$$u = B * f \tag{3}$$

donde

$$B = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{1}{1+ \mid \xi \mid^2} \right)^{\vee}. \tag{4}$$

c) Demuestra que B, denominado *potencial de Bessel*, es de la forma

$$B(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} dt.$$

Indicación: Utiliza argumentos semejantes a los empleados en el cálculo de la Transformada de Fourier de la Gaussiana y el hecho de que

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-ta} dt$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{1+ \mid y \mid^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)} dt.$$

21.6 Simetrías

Utilizando en cada caso la unicidad de la solución y la invarianza del problema con respecto a un grupo de transformaciones demuestra la simetría de la solución:

a) En el sistema lineal $Ax = b$ demuestra que la solución $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es tal que $x_i = x_j$ cuando $b_i = b_j$ y $a_{ik} = a_{jk}$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

b) En la ecuación de Laplace en una dimensión

$$\begin{cases} -w_{xx} = f(x), & -1 < x < 1 \\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

demuestra que cuando f es par (resp. impar) la solución es par (resp. impar).

c) En la ecuación de Laplace en el disco

$$\begin{cases} -\Delta w = f(x) \quad \text{en} \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n : \mid x \mid \leqslant 1\} \\ w\Big|_{\partial B} = 0 \end{cases}$$

demuestra que cuando $f = f(\mid x \mid)$, i.e. f tiene simetría radial, entonces también la solución w tiene simetría radial.

d) En el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

demuestra que u es par (resp. impar) respecto a la variable espacial x cuando f es par (resp. impar).

21.7 Espacios de Sobolev

1.- Demostrar que la desigualdad de Poincaré no se cumple en toda la recta real.

Solución: Tenemos que probar que no existe ninguna constante positiva $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi' \mid^2 dx, \; \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}).$$

Para ello vamos a construir una sucesión de funciones test $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2 dx \Big/ \int_{\mathbb{R}} \mid \varphi_n' \mid^2 dx \to \infty.$$

Dada una función test no trivial $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ definimos

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2\left(\frac{x}{n}\right) dx = n \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(y) dy$$

mientras que

$$\int_{\mathbb{R}} | \varphi_n'(x) |^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} (\varphi')^2 \left(\frac{x}{n} \right) dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} (\varphi')^2 (y) dy.$$

Por lo tanto

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2(x)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\varphi_n')^2(x)dx} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi^2(y)dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\varphi')^2(y)dy} n^2 \to \infty, \, n \to \infty.$$

2.- Comprobar que la desigualdad de Poincaré tampoco se cumple en un intervalo semi-infinito.

Solución: Por traslación y simetría basta considerar el caso del intervalo $(0, \infty)$ donde la misma prueba del problema anterior se aplica.

3.- Sea $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Demostrar que

$$\int_\Omega \varphi^2 dxdy \leqslant \int_\Omega | \varphi_x |^2 \, dxdy, \, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Solución: Para cualquier punto $(x, y) \in \Omega$, como $(0, y) \in \partial\Omega$ tenemos que $\varphi(0, y) = 0$. Integrando en la variable x en el segmento horizontal que une $(0, y)$ con (x, y) tenemos entonces

$$\varphi(x, y) = \int_0^x \partial_x \varphi(s, y) ds.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} | \varphi(x, y) | &\leqslant \int_0^x | \partial_x \varphi(s, y) | \, dx \\ &\leqslant \left(\int_0^x | \partial_x \varphi((s, y) |^2 \, dx \right)^{1/2} \sqrt{x} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 | \partial_x \varphi(s, y) |^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$| \varphi(x, y) |^2 \leqslant \int_0^1 | \partial_x \varphi(x, y) |^2 \, dx, \, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Integrando en $(x, y) \in \Omega$ obtenemos que

$$\int_\Omega | \varphi(x, y) |^2 \, dxdy \leqslant \int_\Omega | \partial_x \varphi(x, y) |^2 \, dxdy.$$

4.- Consideramos la banda infinita

$$\Omega = (0,\, 1) \times \mathbb{R}_y \subset \mathbb{R}^2$$

demostrar que se cumple la desigualdad del ejercicio anterior.

Solución: La prueba del ejercicio anterior se aplica sin ninguna alteración pues y no juega más que el papel de un parámetro de integración.

5.- Probar la desigualdad de Poincaré-Wirtinger

$$\int_0^1 \varphi^2 dx \leqslant \int_0^1 \mid \varphi' \mid^2 dx$$

en el subespacio

$$V = \left\{ \varphi \in H^1(0,\, 1) : \int_0^1 \varphi dx = 0 \right\}$$

de funciones de media nula.

Deducir que en V la semi-norma

$$\| \varphi \|_V = \left(\int_0^1 \mid \varphi' \mid^2 dx \right)^{1/2}$$

es una norma equivalente a la inducida por la norma de $H^1(0,\, 1)$.

Solución:

• Toda función de $H^1(0,\, 1)$ es continua. Por tanto, si es de media nula, existe necesariamente un punto $x_0 \in (0,\, 1)$ en el que $\varphi(x_0) = 0$.

Entonces, para cualquier $x \in (0,\, 1)$ se tiene

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \varphi'(s) ds$$

y

$$\begin{aligned} \mid \varphi(x) \mid &\leqslant \int_{x_0}^x \mid \varphi'(s) \mid ds \leqslant \left(\int_{x_0}^x \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \right)^{1/2} \sqrt{x - x_0} \\ &\leq \left(\int_{x_0}^x \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \mid \varphi'(s) \mid^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mid \varphi(x) \mid^2 \leqslant \int_0^1 \mid \varphi'(s) \mid^2 ds, \; \forall x \in (0,\, 1).$$

Integrando esta desigualdad obtenemos

$$\int_0^1 \varphi^2 dx \leqslant \int_0^1 \mid \varphi' \mid^2 dx.$$

6.- Consideramos el problema de Neumann

$$(21.12) \qquad \begin{cases} -u_{xx} = f, \quad 0 < x < 1 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

- Probar que la condición necesaria para que (21.12) tenga solución es que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.
- Probar que la solución de (21.12) no puede ser única.
- Probar, usando la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, que la solución de (21.12) de media cero es única.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$

• Integrando la ecuación de (21.12) y usando las condiciones de contorno tenemos

$$\int_0^1 f dx = -\int_0^1 u_{xx} dx = -u_x(1) + u_x(0) = 0.$$

• En efecto, si u es una solución de (21.12) cualquier otra función de la forma $u_c = u+c$ con $c \in \mathbb{R}$ constante es también solución de (21.12) puesto que

$$u_c'' = -(u+c)'' = -u'' = f$$

y que

$$u_c'(x) = (u+c)'(x) = u'(x) = 0, \; x = 0, \; 1.$$

• Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones de (21.12). Entonces $v = u_1 - u_2$ es solución de

$$\begin{cases} -v'' = 0, \quad 0 < x < 1 \\ v_x(0) = v_x(1) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación por v, integrando por partes y usando las condiciones de contorno tenemos

$$\int_0^1 v_x^2 dx = 0.$$

Ahora bien, si u_1 y u_2 son funciones de media nula también v lo es por lo que, por la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, si $\displaystyle\int_0^1 v_x^2 dx = 0$ también se tiene $\displaystyle\int_0^1 v^2 dx = 0$ y, por consiguiente, $v \equiv 0$. Es decir, $u_1 \equiv u_2$ lo cual garantiza el resultado de unicidad enunciado.

7.- Sea $u \in H_0^1(0,\,1)$ la solución de

$$\left\{\begin{array}{l} -u_{xx} = f,\ x \in (0,\,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array}\right. \tag{21.13}$$

Definimos la extensión impar de u y f del modo siguiente

$$\tilde{u}(x) = \left\{\begin{array}{ll} u(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -u(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \tilde{f}(x) = \left\{\begin{array}{ll} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -f(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Probar que $\tilde{u}$ es tal que $\tilde{u} \in H_0^1(-1,\,1)$ y que satisface

$$\left\{\begin{array}{l} -\tilde{u}_{xx} = \tilde{f},\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0. \end{array}\right. \tag{21.14}$$

Solución: Comprobamos en primer lugar que $\tilde{u} \in H_0^1(-1,\,1)$. Es obvio que $\tilde{u} \in L^2(-1,\,1)$. En efecto,

$$\int_{-1}^{1} \mid \tilde{u} \mid^2 dx = 2 \int_0^1 u^2 dx < \infty.$$

Por otra parte, la derivada de $\tilde{u}$ en el sentido de las distribuciones viene dada por

$$(\tilde{u})'(x) = u'(x)1_{(0,\,1)} + u'(-x)1_{(-1,\,0)}. \tag{21.15}$$

En efecto, en la derivada distribucional de $\tilde{u}$ no posee un elemento singular en $x = 0$ puesto que no hay discontinuidad de $\tilde{u}$ en ese punto.

Por último, $\tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0$. Por tanto, $\tilde{u} \in H_0^1(-1,\,1)$.

Por otra parte, la formulación variacional de (21.13) garantiza que

$$\int_0^1 u_x \varphi_x dx = \int_0^1 f \varphi dx,\ \forall \varphi \in C_c^1(0,\,1). \tag{21.16}$$

De (21.15) y de (21.16) se deduce que

$$\int_{-1}^{1} \tilde{u}_x \varphi_x dx = \int_{-1}^{1} \tilde{f} \varphi dx, \tag{21.17}$$

para toda función test $\varphi \in C_c^1(-1,\,1)$ con soporte en $(0,\,1)$ o en $(-1,\,0)$.

De (21.17) deducimos que

$$-\tilde{u}_{xx} = \tilde{f} \tag{21.18}$$

tanto en el intervalo $(-1,\,0)$ como en el $(0,\,1)$.

Por último, dada una función test arbitraria $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, de (21.18) tenemos que

$$-\tilde{u}_{xx}\varphi = \tilde{f}\varphi \quad \text{p.c.t. } x \in (-1, 1). \tag{21.19}$$

Integrando (21.19) en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ tenemos

$$\int_{-1}^{0} \tilde{u}_x \varphi_x dx - \tilde{u}_x(0^-)\varphi(0) = \int_{-1}^{0} \tilde{f}\varphi dx$$

y

$$\int_{0}^{1} \tilde{u}_x \varphi_x dx + \tilde{u}_x(0^+)\varphi(0) = \int_{0}^{1} \tilde{f}\varphi dx.$$

Sumando ambas identidades obtenemos (21.17) para cualquier $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ y por tanto $\tilde{u}$ es la solución de (21.14).

8.- Comprobar que si Ω es la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 2$, existen funciones de $H^1(\Omega)$ que no son continuas.

Indicación: Considerar funciones de la forma

$$\varphi(x) = \mid x \mid^{-p}$$

con $p > 0$, o, si fuese necesario,

$$\varphi(x) = \mid x \mid^{-p} \log^{-q}(2 \mid x \mid).$$

9.- Comprobar mediante un argumento de cambio de escala que la desigualdad de Poincaré no puede ser cierta en un dominio cónico Ω.

Indicación: Ω es un cono si $\lambda x \in \Omega$ para todo $x \in \Omega$ y $\lambda > 0$.

10.- Probar un resultado de existencia y unicidad para el problema de Neumann:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f, & 0 < x < 1 \\ u_x(0) = u_x(1) = 0 \end{cases} \tag{21.20}$$

que modeliza las vibraciones de una cuerda, libre en sus extremos y sometida a una fuerza f.

Solución.

- En primer lugar, integrando la ecuación en el intervalo $(0,\,1)$ y usando las condiciones de contorno observamos que una condición necesaria para la existencia de solución es que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0. \tag{21.21}$$

- En segundo lugar observamos que si u es solución de (21.20), entonces, para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$, $u + c$ es también solución.

  Por tanto no cabe pretender la unicidad de solución de manera absoluta sino que la unicidad sólo es esperable módulo constantes aditivas.

  Buscaremos por tanto soluciones de media nula

$$\int_0^1 u(x)dx = 0. \tag{21.22}$$

  Conviene observar que dada cualquier función $v = v(x)$, de entre todas las funciones de la forma

$$u_c(x) = v(x) + c \tag{21.23}$$

  con $c \in \mathbb{R}$ sólo hay una que verifica la condición (21.22). Esto ocurre precisamente cuando

$$c = -\int_0^1 v(x)dx. \tag{21.24}$$

- A partir de ahora intentaremos por tanto probar que, bajo la condición (21.21) existe una única solución u que verifica (21.22).

- Introducimos el subespacio

$$V = \left\{ v \in H^1(0,\,1) : \int_0^1 v(x)dx = 0 \right\} \tag{21.25}$$

  del espacio de Sobolev $H^1(0,\,1)$.

  Es fácil comprobar que V está bien definido y que es un subespacio cerrado de $H^1(0,\,1)$.

  Veamos por ejemplo que es cerrado. Si $v_n \to v$ en $H^1(0,\,1)$, en particular se tiene que $v_n \to v$ en $L^2(0,\,1)$ y esto permite garantizar que

$$\int_0^1 v_n dx \to \int_0^1 v dx$$

  de modo que si $\int_0^1 v_n dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente, $\int_0^1 v dx = 0$.

- Recordemos que según la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^1 u^2 dx \leqslant C \int_0^1 \mid u_x \mid^2 dx, \; \forall u \in V. \tag{21.26}$$

- Consideramos ahora el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 v_x^2 dx - \int_0^1 f v dx, \tag{21.27}$$

en el espacio de Hilbert V.

El Método Directo del Cálculo de Variaciones garantiza la existencia de un minimizador $u \in V$ de J tal que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v). \tag{21.28}$$

En efecto,

  - V es un espacio de Hilbert,
  - J es una función continua de V en $\mathbb{R}$,
  - J es convexa,
  - J es coerciva.

La coercividad de la función J se prueba a partir de la desigualdad (21.26). En efecto, por (21.26) la norma inducida por $H^1(0, 1)$ sobre V es equivalente a la norma

$$\| v \|_V = \left(\int_0^1 v_x^2 dx \right)^{1/2}. \tag{21.29}$$

Tenemos entonces, por (21.26) nuevamente,

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mid v_x \mid^2 dx - \int_0^1 f v dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \mid v_x \mid^2 dx - \| f \|_{L^2(0,1)} \| v \|_{L^2(0,1)} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \| v \|_V^2 - \sqrt{c} \| f \|_{L^2(0,1)} \| v \|_V . \end{aligned} \tag{21.30}$$

De la última desigualdad es obvio que

$$J(v) \to \infty, \; \| v \|_V \to \infty. \tag{21.31}$$

- El mínimo de J en V proporciona una solución débil de (21.20) que satisface

$$\begin{cases} u \in V \\ \displaystyle\int_0^1 u_x v_x dx = \int_0^1 f v dx, \; \forall v \in V. \end{cases} \tag{21.32}$$

En efecto,

$$J(u) \leqslant J(u+tv),\ \forall v \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{21.33}$$

por ser u el mínimo de J en V.

Desarrollando el valor de $J(u)$ y $J(u+tv)$ en (21.33) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 dx - \int_0^1 fudx \quad &\leqslant \quad \frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2 + t\int_0^1 u_x v_x dx \\ &\quad + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v_x^2 dx - \int_0^1 fudx - t\int_0^1 fvdx. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos

$$0 \leqslant t\int_0^1 u_x v_x dx + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v_x^2 dx - t\int_0^1 fvdx. \tag{21.34}$$

Dividiendo por $t > 0$ y pasando al límite $t \to 0^+$ deducimos

$$0 \leqslant \int_0^1 u_x v_x dx - \int_0^1 fvdx,\ \forall v \in V. \tag{21.35}$$

De modo análogo, dividiendo en (21.34) por $t < 0$ y pasando al límite $t \to 0^-$ obtenemos

$$0 \geqslant \int_0^1 u_x v_x dx - \int_0^1 fvdx. \tag{21.36}$$

Combinando (21.35) y (21.36) obtenemos (21.32).

- Conviene observar que si bien en (21.32) la formulación débil se verifica en un principio para las funciones test v en V, en realidad la misma identidad se cumple para todo $v \in H^1(0,\,1)$.

  En efecto, dada $v \in H^1(0,\,1)$ se puede descomponer como

$$v = w + c,\ w \in V,\ c \in \mathbb{R} \tag{21.37}$$

donde

$$w = v - \int_0^1 vdx,\ c = \int_0^1 vdx. \tag{21.38}$$

Aplicando (21.32) a $w \in V$ obtenemos

$$\int_0^1 u_x w_x dx = \int_0^1 fwdx. \tag{21.39}$$

Por otra parte

$$\int_0^1 u_x c_x dx = 0 \tag{21.40}$$

puesto que $c_x = 0$ y

$$\int_0^1 fc dx = c \int_0^1 f dx = 0 \tag{21.41}$$

ya que, por hipótesis, $\int_0^1 f dx = 0$.

Combinando (21.39)-(21.41) vemos que

$$\int_0^1 u_x v_x dx = \int_0^1 f v dx, \ \forall v \in H^1(0,\, 1). \tag{21.42}$$

- La función J es estrictamente convexa en V y por tanto posee un único punto de mínimo. Eso garantiza que (21.20) admite una única solución débil que se obtiene como mínimo de J, pero en realidad la solución débil es única, con independencia del método empleado en su obtención

  En efecto, supongamos que $u_1 \in V$, $u_2 \in V$ son dos soluciones débiles que satisfacen (21.32). Definimos entonces

  $$w = u_1 - u_2 \in V$$

  que satisface

  $$\int_0^1 w_x v_x dx = 0, \ \forall v \in V.$$

  Tomando como función test $v = w$ obtenemos

  $$\int_0^1 w_x^2 dx = 0$$

  lo cual implica que $w_x = 0$ p.c.t. $x \in (0,\, 1)$. Por tanto w es constante y, como es de media cero por pertenecer a V, necesariamente $w \equiv 0$. Es decir $u_1 \equiv u_2$.

  El mismo argumento demuestra que la solución débil de (21.20) que satisface

  $$\int_0^1 u_c dx = c$$

  es única, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

11.- Consideramos la ecuación

$$-\Delta u + u = f \ \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{21.43}$$

En un ejercicio anterior, utilizando la transformada de Fourier probamos que (21.43) admite una única solución que puede escribirse como

$$u = B * f \tag{21.44}$$

donde B es el potencial de Bessel

$$B(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}} dt. \tag{21.45}$$

a) Probar un resultado semejante utilizando métodos variacionales, es decir, comprobar que para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe una única solución débil $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de (21.43).

b) Comprobar que en realidad la solución así obtenida pertenece a $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Solución.

(a) Definimos la solución débil de (21.43) como

$$\begin{cases} u \in H^1(\mathbb{R}^n) \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^n} uv dx = \int_{\mathbb{R}^n} fv dx, \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{21.46}$$

- La unicidad de la solución débil se obtiene como es habitual.
- Para probar la existencia basta con aplicar el Método Directo del Cálculo de Variaciones al funcional

$$\begin{aligned} &J : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \\ &J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[| \nabla v |^2 + v^2 \right] dx - \int_{\mathbb{R}^n} fv dx. \end{aligned}$$

Los argumentos habituales permiten comprobar, en efecto, que J es continuo, convexo y coercivo en el espacio de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^n)$.

La coercividad es fácil de verificar puesto que en esta ocasión la parte cuadrática del funcional coincide con el cuadrado de la norma en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) El hecho de que la solución débil pertenece a $H^2(\mathbb{R}^n)$ se deduce del hecho que la solución débil, en el sentido de las distribuciones, satisface

$$-\Delta u + u = f. \tag{21.47}$$

Por tanto, como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$-\Delta u = g = -u + f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{21.48}$$

De este hecho se deduce que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, aplicando la transformada de Fourier tenemos que

$$| \xi |^2 \hat{u}(\xi) = \hat{g}(\xi). \tag{21.49}$$

Como $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ deducimos que $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y por tanto $| \xi |^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

De este hecho deducimos que

$$p(\xi)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{21.50}$$

para todo polinomio homogéneo p de grado 2. En efecto, un polinomio homogéneo p es de la forma

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\,\xi_j \tag{21.51}$$

para ciertos coeficientes reales $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Por lo tanto existe, una constante $c > 0$ tal que

$$| p(\xi) | \leqslant c \, | \xi |^2, \; \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{21.52}$$

De (21.52) deducimos que, como $| \xi |^2 \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $p(\xi)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Esto permite concluir que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, recordemos que

$$H^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n) : \partial^2_{ij} u \in L^2(\mathbb{R}^n),\, i, j = 1 \dots, n \right\}$$

que se trata de un espacio de Hilbert con la norma

$$\| u \|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \left[\int_0^1 \left[u^2 + | \nabla u |^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left| \partial^2_{ij} u \right|^2 \right] dx \right]^{1/2}.$$

Por tanto, como $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ por construcción de la solución débil, basta con ver que $\partial^2_{ij} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada par de índices i, $j = 1, \cdots, n$.

Para comprobar ésto podemos nuevamente usar la transformada de Fourier. en efecto, $\partial^2_{ij} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\xi_i \xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y esto es evidentemente cierto puesto que $p(\xi) = \xi_i \xi_j$ es un polinomio homogéneo de grado 2.

12.- Consideramos la siguiente ecuación elíptica en la recta real $I\!R$:

$$-u_{xx} + u = f, \quad \text{en} \quad I\!R. \tag{1}$$

a) ¿Se trata de un problema de Cauchy en el que se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya?

b) Calcular la solución fundamental $E = E(x)$ integrable tal que:

$$-E_{xx} + E = \delta_0, \quad \text{en} \quad I\!R. \tag{2}$$

Indicación: Observar que E ha de ser necesariamente de la forma $E(x) = \alpha e^x$ para $x < 0$ y $E(x) = \beta e^{-x}$ para $x > 0$ y calcular las constantes α y β de modo que se verifique (2).

c) Comprueba que E está en $L^p(I\!R)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

d) Escribe la solución de (1) por convolución con el núcleo E y deduce que u está uniformemente acotada cuando f está en $L^2(I\!R)$.

e) Escribe la formulación variacional de las soluciones débiles $u \in H^1(I\!R)$ de (1) cuando f está en $L^2(I\!R)$.

f) Define un funcional $J : H^1(I\!R) \to I\!R$ cuyo mínimo sea la solución débil buscada y comprueba que verifica todas las condiciones del Método Directo del Cálculo de Variaciones.

g) Deduce la existencia de un mínimo y comprueba que se trata de una solución débil.

h) Prueba que la solución débil es única.

Solución:

$\boxed{\text{a}}$ El problema considerado no es de Cauchy. No se prescriben los datos en ninguna hipersuperficie (un punto en este caso).

$\boxed{\text{b}}$ Para $x < 0$ y $x > 0$, $E = E(x)$ es solución de la EDO $E'' = E$ y por tanto es de la forma $E = ae^x + be^{-x}$ para ciertas constantes a y b en cada uno de los dos intervalos.

Imponiendo la condición de que E es integrable se obtiene que

$$E(x) = \alpha 1_{[x,0]} e^x + \beta 1_{[x>0]} e^{-x}.$$

De la continuidad de E en $x = 0$ deducimos que $\alpha = \beta$.

Como, por otra parte,

$$-E_{xx} + E = -[E_x]\Big|_{x=0}$$

y como

$$[E_x] = -\beta - \alpha$$

deducimos que

$$E(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\Big|_{[x<0]} + e^{-x}\Big|_{[x>0]} \right).$$

$\boxed{\text{c}}$ Es evidente que $E \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Además todas las normas pueden calcularse explícitamente.

$\boxed{\text{d}}$ La transformada de Fourier de E se calcula de manera inmediata de la ecuación:

$$\widehat{-E_{xx}} + \hat{E} = \hat{\delta}_0$$

y por tanto

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

$\boxed{\text{e}}$ Tenemos entonces

$$\begin{aligned} u(x) &= [E * f](x) = \int_{\mathbb{R}} E(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} f(y)dy + \int_{x}^{\infty} e^{x-y} f(y)dy\right]. \end{aligned}$$

El hecho de que $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ cuando $f \in L^2(\mathbb{R})$ se deduce inmediatamente por la desigualdad de Young para la convolución o aplicando directamente la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la expresión de u.

$\boxed{\text{f}}$

$$\begin{cases} u \in H^1(\mathbb{R}) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (u_x v_x + uv)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} fv dx, \; \forall v \in H^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

$\boxed{\text{g}}$

$$\begin{aligned} &J : \; H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \\ &J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_x^2 + u^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}} fu dx. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que:

- J está bien definido,
- J es continuo,
- J es coercivo,
- J es convexo.

Aplicando el MDCV se deduce entonces la existencia de un mínimo $u \in H^1(\mathbb{R})$ de J.

$\boxed{\text{h}}$ El mínimo de J verifica la formulación débil. Para ello basta comprobar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}} (u_x v_x + uv)\, dx - \int_{\mathbb{R}} fv$$

y observar que el límite se anula por ser u el mínimo de J.

$\boxed{\text{i}}$ La solución débil es única. De haber dos $u_1,\ u_2 \in H^1(\mathbb{R})$ definimos $w = u_1 - u_2 \in H^1(\mathbb{R})$ que satisface

$$\int_{\mathbb{R}} (w_x v_x + wv)\, dx = 0.$$

Basta tomar la función test $v = w$ para ver que $w \equiv 0$.

21.8 Ejercicios diversos.

1.- Comprobar de manera rigurosa que δ_0, la masa de Dirac, es el neutro con respecto a la convolución, i.e.

$$f * \delta_0 = f.$$

Indicación: Para ello define una aproximación de la identidad $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(x)$ y comprueba mediante el TDC que $$f * \rho_\varepsilon \to f,\ \varepsilon \to 0.$$

3.- Dada una función $f = f(\sigma)$, escribe la integral doble

$$\int_0^t \int_0^s f(\sigma) d\sigma ds$$

como una integral simple

Indicación: Utiliza el Teorema de Fubini e invierte el orden en las variables de integración.

4.- Demuestra la fórmula de Leibniz para la derivación del producto:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v.$$

En esta identidad utilizamos las convenciones habituales para los multiíndices:

$$\begin{aligned}
\beta &\leqslant \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leqslant \alpha_i,\ i = 1, \cdots, n, \\
D^\alpha &= \partial^{|\alpha|} \Big/ \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}, \mid \alpha \mid = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \\
\binom{\alpha}{\beta} &= \alpha! \Big/ \beta!(\alpha - \beta)!, \\
\alpha! &= \alpha_1! \cdots \alpha_n!
\end{aligned}$$

5.- Utilizando la fórmula de Taylor para funciones de una sola variable real demuestra que si $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ se tiene:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha + O\left(| \, x \, |^{k+1}\right)$$

cuando $| \, x \, | \to 0$.

En esta identidad se entiende que

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Indicación: Aplica la fórmula de Taylor a la función $t \to f(tx)$.

6.- Prueba la identidad multinomial:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \binom{| \, \alpha \, |}{\alpha} x^\alpha$$

donde

$$\binom{| \, \alpha \, |}{\alpha} = \frac{| \, \alpha \, |!}{\alpha!}.$$

7.- Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-1/x^2}, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es de clase C^∞ pero que no es analítica en $x = 0$.

¿Cuál de las propiedades fundamentales de las funciones analíticas se observa que no se verifica en el marco de las funciones de clase C^∞ a través de este ejemplo?

8.- Usando el Teorema de la Convergencia Dominada demuestra que si $f \in L^1(0, 1)$ se tiene que

- $\partial_t \mathcal{H}(x, t) = \displaystyle\int_0^1 x \cos(xt) f(x) dx \quad$ si $\mathcal{H}(x, t) = \displaystyle\int_0^1 \sin(xt) f(x) dx,$
- $\partial_t \mathcal{G}(x, t) = -\dfrac{1}{t^2} \displaystyle\int_0^1 x \cos\left(\frac{x}{t}\right) f(x) dx$ para todo $t \neq 0$ si

$$\mathcal{G}(x, t) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{t}\right) f(x) dx.$$

9.- a) Probar que existen funciones continuas $f \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $f(x)$ no tiende a cero cuando $| \, x \, | \to \infty$.

b) Probar que, sin embargo,

$$\lim_{|x|\to\infty}[|\ f(x)\ |] = 0$$

cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

10.- Utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la función $[\mathcal{G}(\cdot,t) * f](x)$ solución de la ecuación del calor con dato inicial $f = f(x)$ es una función derivable con respecto a $t > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demuestra asimismo que

$$\partial_t[\mathcal{G}(\cdot,t) * f](x) = [\partial_t\mathcal{G}(\cdot,t) * f]\,(x).$$

11.- ¿Existen funciones $f, g \in L^2(I\!R^n)$ tales que $f * g = 0$?

12.- Comprueba que el espacio $L^2(I\!R^n)$ no está contenido en $L^1(I\!R^n)$ ni $L^1(I\!R^n)$ en $L^2(I\!R^n)$. Demuestra que, sin embargo, $L^2(\{|x| \leq 1\})$ está contenido en $L^1(\{|x| \leq 1\})$ con continuidad.

13.- Prueba que si $f \in L^1(I\!R^n)$ es de soporte compacto su transformada de Fourier es una función analítica real y que, por tanto, no puede tener soporte comnpacto.

14.- Comprueba que si el soporte de f es el intervalo $[-k, k]$ y el de la aproximación de la identidad ρ_ε el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces el soporte de $f * \rho_\varepsilon$ está contenido en el intervalo $[-k-\varepsilon, k+\varepsilon]$.

15.- Analiza los exponentes $\alpha \in I\!R$ y $p \geq 1$ tales que $|x|^\alpha \in L^p(\{|x| \leq 1\})$.

16.- Utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada demuestra que si $u \in C^1(I\!R_t; L^1(I\!R^n_x))$ entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n} u(x,t)dx = \int_{R^n} u_t(x,t)dx.$$