Curso avanzado de geometría: **Topología Algebraica**.

Éste sería un curso introductorio a la topología algebraica, un tema que no se ve en el grado ni en el máster en la UAM, a diferencia de otras universidades. En concreto, trataría los temas de grupo fundamental (cuya definición se ve en el grado, pero no sus principales métodos de cálculo), espacios recubridores, homología (singular y celular), y si hubiera suficiente tiempo, cohomología. Estos son conceptos básicos que los futuros geómetras y topólogos de entre nuestros estudiantes deberían conocer, pero considero que podría ser de mucha utilidad también para los alumnos que quieran hacer un doctorado en temas de álgebra o incluso para aquellos interesados en análisis de datos:

- En teoría de grupos se manejan complejos celulares y espacios recubridores, además de que la (co)homología de grupos (con coeficientes enteros) se puede interpretar en términos de la homología singular de los espacios de Eilenberg-MacLane correspondientes.
- En geometría algebraica se necesitan las herramientas de cohomología de haces y álgebra homológica, y es difícil tener intuición sobre esas herramientas en abstracto sin conocer teorías de (co)homología más sencillas, o entender cómo usar sucesiones espectrales sin haber visto ejemplos concretos de demostraciones que usen la estrategia de "perseguir flechas" antes. En ese sentido, el capítulo 2 de [1] (el tema 4 del programa que propongo) proporciona una introducción al álgebra homológica.
- En análisis topológico de datos se usa la homología persistente: a partir de unos datos, se extrae de ellos un espacio topológico con una filtración. La homología persistente se obtiene a partir de la homología (singular, celular o simplicial, al ser todas equivalentes) de las partes de esta filtración.

La referencia principal sería [1], concretamente los capítulos 0, 1, 2, y si hay tiempo, 3. El programa sería el siguiente:

1. Conceptos previos: equivalencia homotópica, complejos celulares, operaciones de espacios, propiedad de extensión de homotopía.
2. El grupo fundamental: definición, homomorfismos inducidos, productos libres de grupos, teorema de Seifert-van Kampen, ejemplos y aplicaciones.
3. Espacios recubridores: definición, propiedad de levantamiento de homotopías, clasificación de espacios recubridores, transformaciones deck.
4. Homología.
   - Homología singular: definición, homomorfismos inducidos, invarianza por equivalencia homotópica, homología relativa, sucesiones exactas largas y excisión.
   - Homología celular: definición, equivalencia de la homología singular y celular.
   - Ejemplos y métodos de cálculo: característica de Euler, sucesión de Mayer Vietoris, homología con otros coeficientes, aplicaciones.
5. Cohomología: definición, teorema del coeficiente universal, estructura de anillo, fórmula de Künneth.

Referencias

[1] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] William S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. Vol. 56, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[3] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[4] ———, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.