MODELIZACIÓN EN FLUIDOS Y ESTRUCTURAS

ÁNGEL CASTRO MARTÍNEZ Y DANIEL FARACO HURTADO

Febrero 2023

El curso que proponemos se titula *Mecánica de fluidos y sólidos: Microestucturas, turbulencia.*

El objetivo del curso es doble por un lado familiarizar al estudiante con la modelización de problemas en mecánica de fluidos y sólidos y electromagnetismo. Por otro presentar avances en problemas centrales de la matemática aplicada como la conjetura de Morrey, o los problemas de unicidad y regularidad para Navier Stokes (Problema de Ladysenskaya y problema Clay).

La primera parte completa aspectos de la matemática aplicada que no se han podido cubrir en la carrera o en el resto del master. Se describen modelos centrales de la física matemática, la teoría de los materiales, el electromagnetismo o la mecánica de fluidos. El paradigma subyacente es describir el comportamiento efectivo (macroscópico) de microestructuras en la escala mesoscópica. Dos ejemplos canónicos son la teoría de homogenización en ciencia de los materiales, y la modelización *coarse grained* en el estudio de fluidos turbulentos. Usando los modelos físicos como linea conductora, se recuerdan conceptos como la convergencia, débil, (convergencia dos escalas), Lagrangianos y Hamiltonianos en el contexto del electromagnetismo, medidas de Young y medidas microlocales. Se describe como modelar fenómenos turbulentos, como inestabilidades en mecánica de fluidos o estocasticidad espontánea usando las ideas anteriores. La segunda parte del curso profundiza en los dos problemas principales de la mecánica de fluidos, la unicidad de soluciones de Navier-Stokes y la regularidad de las soluciones. Se explican las dos corrientes actuales para resolver el problema de Olga Ladyshenskaya sobre la unicidad de Navier Stokes, convex integration y el programa de Vladimir Sverak basando en propagar la inestabilidad del problema lineal para conseguir no unicidad. Respecto al problema de regularidad se explicarán la teoría de Prodi-Serrin-Ladyshenskaya y el criterio de Beale-Kato Mada.

Como prerrequisitos, se recomienda haber cursado los cursos de Análisis y Ecuaciones en derivadas parciales del primer cuatrimestre del Máster y se recomienda cursar el curso avanzado de ecuaciones en derivadas parciales.

1. Programa

I. Introducción a la Mecánica de medios continuos..
  - -Descripción del movimiento y cinemática.
  - -Leyes de conservación de la mecánica de medios continuos.
  - -Leyes constitutivas: elasticidad no lineal y fluidos.

II. Elasticidad no lineal.
  - -Hiperelasticidad.
  - -Cuasiconvexidad y rango 1 convexidad.(Conjetura de Morrey).
  - -Medidas de Young y Laminados.
  - -Compacidad Compensada.

III. Electrostática.
  - -Teoria de materiales compuestos. Homogenización.
  - -Convergencia en dos escalas.
  - -Ley de Darcy para medios porosos.

IV. Electromagnetismo.
  - -Hamiltonianos y Lagrangianos.
  - -Electromagnetismo. Ecuaciones de Maxwell.

V. Las ecuaciones de la mecánica de fluidos.
 - Principios fisicos y deduccion de las ecuaciones.
 -Conservacion de la energia y vorticidad.
VI. Magnetohidrodinámica.
 -Ecuaciones.
 -Conservacion de la helicidad magnética.
 -Teoria de dinamo.
VII. Integracion convexa.
 -El principio H en mecánica de fluidos.
 - No unicidad de la ecuación de Euler. Estocasticidad espontanea.
 -Aplicaciones a la ecuacion del dinamo.
VIII. Regularidad para Navier-Stokes.
 -Regularidad Teoría de Prodi-Serrin-Ladyshenskaya.
 -Regularidad Teoría de Beale-Kato-Majda
IX. Unicidad. El programa de Vladimir Sverak.
 -Ecuación en variables similares.
 -Teoría espectral.

2. Bibliografía

[1] T. Buckmaster, V. Vicol, Convex integration and phenomenologies in turbulence. EMS Surv. Math. Sci. 6 (2019), 173–263.
[2] A. J. Chorin, J. E. Marsden, A mathematical introduction to fluid mechanics. Third edition. Springer, New York, 1993.
[3] P. G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-dimensional elasticity. North-Holland. Amsterdam, 2000.
[4] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations. Second edition. Springer. New York, 2008.
[5] L. C. Evans, Partial Differential Equations. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
[6] D. Faraco, S. Lindberg, Proof of Taylor's conjecture on magnetic helicity conservation. Comm. Math. Phys. 373 (2020) 707–738.
[7] D. Faraco, S. Lindberg, L. Sézelyhidi Jr., Bounded Solutions of Ideal MHD with Compact Support in Space-Time. Arch. Rat. Mech. Anal.239 (2021) 51–93.
[8] D. Faraco, L. Sézelyhidi JJr., Tartar's conjecture and localization of the quasiconvex hull. Acta Math. 200 (2008) 279–305.
[9] E. Gurtin, An introduction to Continuum Mechanics. Academy Press. San Diego, 2003.
[10] C. Jog, Continuum Mechanics: Foundations and Applications of Mechanics. Cambridge University Press. Cambridge, 2015.
[11] B. Kirchheim, S. Múller, V. Šverák, Studying nonlinear pde by geometry in matrix space. Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, pp. 347-395, Springer, Berlin, 2003.
[12] A. J. Majda, A. L. Bertozzi. Vorticity and incompressible flow. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
[13] C. Marchioro, M. Pulvirenti, Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids. Springer, New York, 1994.
[14] G. W. Milton, The theory of composites. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[15] S. Múller, Variational models for microstructure and phase transitions. In Çalculus of variations and geometric evolution problems. (Cetraro, 1996)", pp. 85-210, Lecture Notes in Math., 1713. Springer. Berlin, 1999.
[16] R. W. Ogden, Non-Linear Elastic Deformations. Dover. Mineola, 1984.
[17] P. Pedregal, Variational methods in nonlinear elasticity. SIAM. Philadelphia, 2000.

[18] F. Rindler, Calculus of variations. Springer, Cham, 2018.
[19] E. Stein, E.; Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, USA (1970).
[20] L. Székelyhidi Jr., From isometric embeddings to turbulence. HCDTE lecture notes. Part II. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations, 63 pp., AIMS Ser. Appl. Math., 7, AIMS, Springfield, MO, 2013.
[21] L. Tartar, The general theory of homogenization. Springer, Berlin; UMI, Bologna, 2009.
[22] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations. Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, pp. 136-212, Res. Notes in Math., 39. Pitman, Boston, London, 1979.
[23] J. L. Vázquez. Fundamentos Matemáticos de la mecánica de fluidos . 2003. Disponible en `https://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/mex10chap.pdf`

3. Métodos docentes

- *Clase magistral*: exposición oral por parte del profesor de los contenidos teóricos fundamentales de cada tema.
- *Seminarios*: Cada alumno será responsable de la exposición oral de un trabajo que le será previamente asignado.
- *Tutoría programada*: Además de reforzar las clases magistrales en estas tutorías se ayudará y guiará al alumno en el trabajo que debe presentar en su seminario
- *Minicursos de Master*. Se contempla la posiblilidad de dos cursos de 10 horas sobre Medidas semicásicas (F.Macía UPM) y homogenizacion en elasticidad (P.Hornung U.Dresden)

4. Evaluación

El 50 % de la nota final vendrá dada por la evaluación del trabajo de investigación realizado por cada alumno. Este trabajo consistirá en el análisis y exposición de un artículo que será asignado por el profesor o elegido por el alumno bajo su supervisión. El otro 45 % correspondera a problemas para entregar que se podrán resolver en grupo.