

# MODELIZACIÓN EN FLUIDOS Y ESTRUCTURAS

DANIEL FARACO HURTADO Y CARLOS MORA CORRAL

Febrero 2022

## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El curso que proponemos se titula *Mecánica de fluidos y sólidos: elasticidad no lineal, teoría de materiales y turbulencia*.

El objetivo del curso es familiarizar al estudiante con la modelización de problemas en elasticidad no lineal, mecánica de fluidos, y ciencia de los materiales. El paradigma del curso es explicar el comportamiento macroscópico de ciertas estructuras microscópicas. En multitud de modelos en física matemática e ingeniería el objetivo es describir el comportamiento efectivo (macroscópico) de estructuras en la escala mesoscópica. Dos ejemplos canónicos son la teoría de homogenización en ciencia de los materiales, y la modelización *coarse grained* en el estudio de fluidos turbulentos. El curso explicará las técnicas matemáticas desarrolladas en los últimos 40 años, que han dado lugar a avances relevantes en mecánica de sólidos y fluidos, cruciales desde el punto de vista aplicado y teórico, como la celebrada solución de la conjetura de Osager. Se presentarán multitud de modelos físicos, así como las técnicas matemáticas necesarias.

Como prerrequisitos, se recomienda haber cursado los cursos de Análisis y Ecuaciones en derivadas parciales del primer cuatrimestre del Máster.

## 2. PROGRAMA

- I. Introducción a la Mecánica de medios continuos
  1. Descripción del movimiento y cinemática
  2. Leyes de conservación de la mecánica de medios continuos
  3. Leyes constitutivas: elasticidad no lineal y fluidos
- II. Teoría matemática de la elasticidad
  1. Hiperelasticidad. Policonvexidad. Método directo del Cálculo de variaciones
  2. Simetrías. Materiales isótropos
  3. Quasiconvexidad y semicontinuidad inferior
  4. Transformaciones de fase en cristales. Efecto de memoria de forma
  5. Relajación, medidas de Young y laminados
- III. Microestructuras y macroestructuras
  1. Compacidad Compensada
  2. Electromagnetismo. Ecuaciones de Maxwell
  3. Electrostática. Teoría de materiales compuestos
  4. Convergencia en dos escalas
  5. Ley de Darcy para medios porosos
- IV. Turbulencia en mecánica de fluidos
  1. Introducción física. Fluidos incompresibles. La función de corriente
  2. Vorticidad. Ecuaciones en términos de la vorticidad. Existencia de soluciones
  3. Teoría de turbulencia de Kolmogorov
  4. El principio  $h$  en mecánica de fluidos. Micro versus macro
  5. Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Plasma en los laboratorios y en astrofísica
  6. Inestabilidades en mecánica de fluidos. Medios porosos. El fenómeno de *viscous fingering*

## 3. BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Buckmaster, V. Vicol, Convex integration and phenomenologies in turbulence. *EMS Surv. Math. Sci.* 6 (2019), 173–263.
- [2] A. J. Chorin, J. E. Marsden, A mathematical introduction to fluid mechanics. Third edition. Springer, New York, 1993.
- [3] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three-dimensional elasticity*. North-Holland. Amsterdam, 2000.
- [4] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Second edition. Springer. New York, 2008.
- [5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [6] D. Faraco, S. Lindberg, Proof of Taylor’s conjecture on magnetic helicity conservation. *Comm. Math. Phys.* 373 (2020) 707–738.
- [7] D. Faraco, S. Lindberg, L. Székelyhidi Jr., Bounded Solutions of Ideal MHD with Compact Support in Space-Time. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 239 (2021) 51–93.
- [8] D. Faraco, L. Székelyhidi Jr., Tartar’s conjecture and localization of the quasicontinuous hull. *Acta Math.* 200 (2008) 279–305.
- [9] E. Gurtin, *An introduction to Continuum Mechanics*. Academy Press. San Diego, 2003.
- [10] C. Jog, *Continuum Mechanics: Foundations and Applications of Mechanics*. Cambridge University Press. Cambridge, 2015.
- [11] B. Kirchheim, S. Müller, V. Šverák, Studying nonlinear pde by geometry in matrix space. *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations*, pp. 347–395, Springer, Berlin, 2003.
- [12] A. J. Majda, A. L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [13] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*. Springer, New York, 1994.
- [14] G. W. Milton, *The theory of composites*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] S. Müller, Variational models for microstructure and phase transitions. In *Calculus of variations and geometric evolution problems*. (Cetraro, 1996)”, pp. 85–210, *Lecture Notes in Math.*, 1713. Springer. Berlin, 1999.
- [16] R. W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover. Mineola, 1984.
- [17] P. Pedregal, *Variational methods in nonlinear elasticity*. SIAM. Philadelphia, 2000.
- [18] F. Rindler, *Calculus of variations*. Springer, Cham, 2018.
- [19] E. Stein, E.; *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, USA (1970).
- [20] L. Székelyhidi Jr., From isometric embeddings to turbulence. HCDTE lecture notes. Part II. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations, 63 pp., *AIMS Ser. Appl. Math.*, 7, AIMS, Springfield, MO, 2013.
- [21] L. Tartar, *The general theory of homogenization*. Springer, Berlin; UMI, Bologna, 2009.
- [22] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations. *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, pp. 136–212, *Res. Notes in Math.*, 39. Pitman, Boston, London, 1979.
- [23] J. L. Vázquez. *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*. 2003. Disponible en <https://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/mex10chap.pdf>

## 4. MÉTODOS DOCENTES

- *Clase magistral*: exposición oral por parte del profesor de los contenidos teóricos fundamentales de cada tema.

- *Seminarios*: Cada alumno será responsable de la exposición oral de un trabajo que le será previamente asignado.
- *Tutoría programada*: Además de reforzar las clases magistrales en estas tutorías se ayudará y guiará al alumno en el trabajo que debe presentar en su seminario
- *Minicursos de Master*. Se prevén dos cursos de 10 horas:
  - *Medidas H, medidas semiclásicas*, impartida por F. Macià (UPM).
  - *Compacidad Compensada para coeficientes variables*. Profesor por determinar.Se financiarán con el programa Pricit o con la ERC Quamap.

## 5. EVALUACIÓN

El 50 % de la nota final vendrá dada por la evaluación del trabajo de investigación realizado por cada alumno. Este trabajo consistirá en el análisis y exposición de un artículo que será asignado por el profesor o elegido por el alumno bajo su supervisión. También habrá un examen de la asignatura que completará el 50 % restante.