"Dios mueve al jugador, y éste, la pieza. ¿Qué Dios detrás de Dios la trama empieza?"
(Jorge Luis Borges)

La hoja volante

Número 6. Junio 2005

EDITORIAL

Bueno, pues esto es la despedida... ¡tenéis en vuestras manos el último número de este curso de la hoja volante! ¡Ciertamente impresionante! Nos despedimos pero sólo hasta septiembre. Queremos agradeceros desde aquí a todos la atención que nos habéis prestado, sobre todo a aquellos que habéis colaborado con la revista. Ha sido un año interesante en el que hemos aprendido mucho pero sobre todo hemos aprendido que nos queda mucho por aprender (tendremos que aprender a evitar las redundancias también...). Para el año que viene... bueno, intentaremos aportar algunas novedades más interesantes aún. Entre otras cosas, estamos pensando en establecer una página web (¡¡una de verdad!!) para poder incluir más contenidos, más fotos, más estupideces... Por cierto, buscamos personas que estén dispuestas a colaborar con nosotros para el año que viene (más información en página 2). En este número: un extra sobre la música y las matemáticas, un artículo sobre Sam Loyd y muchas de las secciones habituales. Para todo lo relacionado con la revista, ya sábeis, enviad un mail a hojavolanteuam@yahoo.es o entregad un sobre en la Secretaría del Departamento de Matemáticas a nombre de "La hoja volante". ¡Disfrutadla!

la portada

Matrimonios, médicos y demás....

Existe una rama de las matemáticas (bueno, de las matemáticas económicas) llamada teoría de bodas ("Theory of Marriages"). La teoría estudia cómo emparejar dos grupos distintos de individuos que tienen preferencias por los miembros del otro grupo. Por ejemplo, supongamos que tenemos n hombres y n mujeres en un pueblo. Cada persona valora a las del sexo opuesto como posibles parejas para él, ordenándolas de la que más le gusta a la que menos le gusta. La teoría se encarga de buscar una forma satisfactoria de casar a todos los miembros de la comunidad. Se puede demostrar que existe un emparejamiento tal que no hay un hombre y una mujer no emparejados de modo que cada uno de ellos prefiera al otro antes que a su pareja. Esta teoría también se utiliza para determinar la manera óptima de adjudicar cada paciente a un médico determinado. Es una rama muy interesante que tiene muchas relaciones con la investigación operativa y la teoría de juegos. Uno de los artículos clásicos es el escrito por D. Gale y L. S. Shapley en 1962, llamado *College Admissions and The Stability of Marriage* (Admisión en colegios mayores y la estabilidad del matrimonio). Os presentamos aquí un pequeño párrafo de este artículo en el que los autores hacen una apología de las matemáticas. Sin duda, maravilloso.

La mayoría de los matemáticos en algún momento de su vida se han encontrado en alguna situación intentando refutar que ellos sean personas con "mucha cabeza para las matemáticas" o que "conocen muchas fórmulas". En esos momentos es conveniente tener algún ejemplo a mano que muestre que las matemáticas no tienen por qué tener algo que ver con figuras geométricas o con fórmulas numéricas. Para este propósito, recomendamos la prueba de nuestro Teorema 1. En la demostración solamente se utiliza la lengua inglesa prescindiendo por completo de símbolos matemáticos; no hay ni un sólo concepto técnico. No es necesario ningún conocimiento previo de cálculo. De hecho, uno necesita poco más que saber contar. Cualquier matemático se dará cuenta inmediatamente de que los razonamientos utilizados son matemáticos, mientras que la gente sin una preparación matemática tendrá alguna que otra dificultad para comprenderla, pero no debido a una falta de familiaridad con los términos utilizados. ¿Qué son, por lo tanto, (hagamos de nuevo la vieja pregunta) las matemáticas? La respuesta, que podemos deducir, es que cualquier razonamiento que es llevado a cabo con la suficiente precisión es matemático, y la razón por la que tus amigos y los nuestros no pueden entender las matemáticas no es porque no tienen la cabeza hecha para las matemáticas, sino porque son incapaces de alcanzar el grado de concentración necesario para seguir una secuencia de implicaciones moderadamente compleja. Esta observación no es una novedad para aquellos que están inmersos en la enseñanza de las matemáticas, pero no será aceptada fácilmente por una persona que no pertenezca a esta profesión...

Podéis consultar el artículo en la biblioteca o en la dirección http://biblioteca.uam.es. La referencia es American Mathematical Monthly , D. Gale and L.S. Shapley, College Admissions and The Stability of Marriage, Vol. 61, No.1(Jan. 1962), 9-15

Música y Matemáticas

En esta sección, intentamos reflejar la relación existente entre música y matemáticas, pocas veces sacada a relucir. Guillermo Martín, violinista, nos describe el lado más artístico y filosófico de esta relación.

Desde los albores de la humanidad, la música nos ha acompañado como medio de expresión de sentimientos en la comunidad. Se han encontrado instrumentos primitivos que se fechan antes incluso que las primeras pinturas rupestres y se puede afirmar que la música es el primer arte que descubrimos.

A lo largo de la historia, se han concebido infinitas teorías sobre lo que debe ser la música: desde un acompañamiento placentero de la poesía en la Grecia clásica hasta la aceptación de la música instrumental en sí misma con el romanticismo.

Si analizamos todas estas teorías (lingüística, retórica, de las pasiones, de la expresión, de la abstracción) tan diferentes entre sí, encontramos, no obstante, que todas ellas terminan utilizando a las matemáticas como soporte lógico del efecto deseado.

Desde este punto, es importante resaltar que todas las combinaciones de sonidos según patrones matemáticos han estado al servicio de las ideas estéticas del momento. Por ejemplo, sabemos desde Pitagoras que los ratios de las frecuencias de las consonancias son 1:2, 2:3, 3:4... y que cuanto más se acerca éste a 1, mayor es la disonancia. Para los griegos, y hasta los comienzos de la polifonía del renacimiento, la consonancia era buena y la disonancia era el "diavolo" en música, pero para el oído actual la disonancia es placentera: es decir que la belleza no está en el sistema matemático empleado sino en la relación subjetiva entre el objeto creado y el oyente.

COLABORADORES

Buscamos dos personas dispuestas a colaborar con nosotros para el año que viene. Estamos pensando en hacer una página web así que sería preferible que tuviesen o bien conocimientos de Diseño Web o bien de Diseño. Tienen que ser personas motivadas a las que les guste escribir. Los interesados mandadnos un mail con el asunto "Colaboración" explicándonos quiénes sois y por qué queréis colaborar con nosotros. ¡Os esperamos!

Para Platón la música resuena en el alma porque sintoniza al hombre con la armonía cósmica revelada por las matemáticas (él creía que los planetas al moverse lanzaban sonidos: la música de las esferas). Esta visión racionalizadora y mística a la vez de la relación entre matemática y música se recuperó en cierto sentido en el siglo XX con los compositores de música serial (combinación de 12 notas diferentes entre sí y repetición de la serie con variantes hasta el final) con ordenador y electrónica, además de los nuevos cosmólogos místicos (Stockhausen). Las construcciones creadas por éstas vanguardias no han sintonizado (olvidemos los círculos especializados en música contemporánea) con el oyente medio que se ha refugiado en una estética cercana al romanticismo del siglo XIX y XX. Sin embargo, no se puede olvidar que éstos compositores han ampliado el horizonte sonoro y creado nuevos lenguajes que ya han olvidado por completo la idea de confrontación consonancia-disonancia. Otros autores han utilizado estas nuevas atmósferas sonoras para crear obras que sí están al alcance de cualquier oyente no especializado: es significativa su presencia en bandas sonoras que por ahora se limitan a películas de terror o ciencia-ficción, desgraciadamente (como puede ser *"2001: Una odisea del Espacio"* o *"Eyes Wide Shut"*, ambas del director Stanley Kubrick).

Y aquí es cuando hay que hacerse la pregunta: ¿puede un modelo matemático encontrar por sí mismo la belleza? La cuestión es compleja porque cualquier obra musical se puede subsumir en modelos matemáticos a posteriori. En este sentido es reveladora la frase de Leibniz: "la música es un ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando". Así, el compositor cuando crea según un sistema a priori que determina toda la construcción no está haciendo música, porque no subyuga el patrón matemático al placer estético. Sólo en cuanto la idea esta al servicio de la belleza o placer estético estamos frente a una obra de arte. Lo otro es interesante en cuanto ejercicio intelectual e imprescindible en cuanto a la búsqueda de nuevos modos de expresión y lenguajes estéticos, pero no será nunca objeto estético autónomo.

Este es, en efecto, el mayor problema del arte contemporáneo porque en su búsqueda de creaciones simplemente nuevas o rompedoras se olvida de lo más importante: la conexión mágica obra-espectador.

En fin, la investigación acústica es necesaria pero no significa nada si no consigue la misma emoción que sugería a nuestros antepasados tocando, cantando y bailando alrededor del fuego... Y para lograrlo convendría recordar que los dos únicos patrones universales de la música son un ritmo con el que poder bailar y una melodía que poder recordar (la memoria es imprescindible para poder apreciar la música) y cantar, puesto que se deben tener siempre en cuenta las limitaciones del oído y del cerebro para ordenar los sonidos. Otra cuestión es la de la cultura musical del oyente medio que le impide apreciar lo que sí estaría de sobra a su alcance en otras circunstancias educativas. Pero ésto sí que no tiene solución...

- Maestro, qué es la verdad?
¿El contrario de la mentira o el contrario del error?
Después de mucho pensar, el maestro contestó:
- La verdad es el contrario de la verdad.
Y siguieron comiendo.
(Antiguo Cuento Indio)
Recopilado por J.C. Carriere

INVESTIGACIÓN FÁCIL

¿Os gustaría escribir un artículo de investigación? ¿En poco tiempo? ¿Sin mucho esfuerzo? ¿Con gente famosa? ¿Por ejemplo, Gauss, Euler...? ¿Queréis tener número 1 de Erdös? ¿Y encima presentarlo en conferencias a lo largo y ancho del mundo? ¡Ahora es posible! Unos estudiantes del MIT han creado un programa que genera artículos de investigación aleatorios en Ciencias de la Computación. Y lo mejor es que han conseguido que les acepten un paper en una conferencia. ¡Increíble!

Más información en:
http://pdos.csail.mit.edu/scigen/

Demostraciones sin palabras

-Bueno Matías, se nos acaba el curso…
- Eso ya lo había escrito yo en el editorial, Carlos.
- Vaya, entonces tendré que hacerte una pregunta o algo… Ah, sí ¿a tí qué es lo que más te ha gustado de la hoja este año?
- Pues, por ejemplo eso que escribimos en la hoja anterior de la visualización me parece muy interesante…
- Si quieres seguimos la sección aquí mismo. Por cierto, mi sección favorita es la del diálogo (y no es porque lo esté escribiendo yo, ¡eh!).
- ¡Ah, claro! Te pides escribir el diálogo y como no se te ocurre nada, empiezas a hablar de otras secciones, ¡así cualquiera!
- Míralo por el lado bueno, ya no hay que escribir la sección de visualización…
- Es verdad. Mira, ahí le has dado…
- Además si quieres hoy te pongo a ti de gracioso, que sé que te gusta.
- Venga, vale.
- Bueno, Matías, como ya sabrás, la serie armónica diverge.
- ¿Lo qué?
- Je, je, je…
- ¡Pero eso no vale, tío! ¡Me estás poniendo de tonto, no de gracioso!
- Ah, para otro mes te pides escribir tú el diálogo. Como te iba diciendo, sabrás que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots=\infty$$

- Sí, me suena que en primero nos lo demostraron.
- Si quieres te cuento una demostración de Pietro Mengoli (1625-1686). Es muy ingeniosa. Mira, hay que comenzar observando que al añadir los inversos de tres números naturales consecutivos la suma es mayor que el triple del inverso del número medio. Por si ibas a preguntarlo

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}>\frac{3}{a}$$

- Pero eso es muy fácil, ¿no? Porque si ponemos común denominador a la izquierda tenemos que la fórmula se cumple si y sólo si

$$\frac{3a^2-1}{a^3-a}>\frac{3}{a} \quad \text{o sea} \quad 2a>0$$

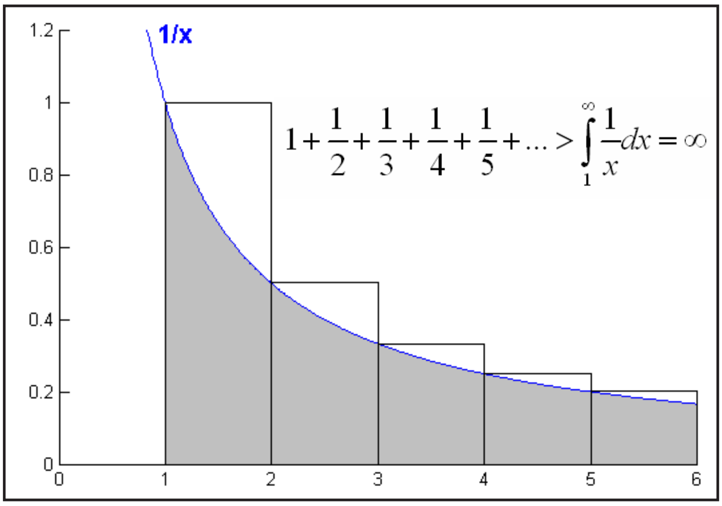
y si a es un número natural, $2a$ será mayor que cero, digo yo.
- ¡Muy bien! Pues ya casi hemos acabado.
- Pero si casi no hemos empezado.
- A ver, si la serie armónica diverge hemos terminado, y si no dime cuánto suma.
- No sé, un número, S.
- Vale, entonces

$$S=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\ldots>$$

$$>1+\left(\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{9}\right)+\ldots=$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots=1+S$$

¡Vaya! Un número que es igual a él más 1, curioso.
- ¡Eso es imposible!
- Tan imposible como que la serie armónica converja.
- Ya veo, ya. Pero, una cosa: ¿por qué esta sección se titula demostraciones sin palabras? ¿qué hay de la visualización?
- Vamos a ello. Te voy a dar una demostración más rápida y visual. ¿Sabes integrar?
- ¿Qué?
- Déjalo…



La demostración de Pietro Mengoli y muchas cosas más, en el genial libro de William Dunham sobre historia de las matemáticas "Viaje a través de los genios". Uno de mis favoritos.

Desde la humillación que sentiste en la hoja anterior cuando fuiste a mirar la solución del acertijillo, llevas deseando un reencuentro con este símbolo. Sólo daremos una pista, volveremos a escribir el texto del acertijo pero esta vez de una forma un poco distinta. Si todavía sigues sin saberlo, comienza a preocuparte, es grave:

¿**C**uál **e**s **l**a **l**etra **q**ue **s**igue **e**n **l**a **s**iguiente **s**erie? **c**, **e**, **l**, **l**, **q**, **s**, **e**, **l**, **s**…

Gracias por vuestras respuestas (todas ellas correctas) a: Alejandro Bellogin, Javi Ramos y Raúl Osuna. Y una nueva oportunidad para poneros a prueba:

El acertijillo

¿Puede alguien decirnos por qué están ordenados los números del cero al nueve de la siguiente manera? 0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3, 1. Esperamos vuestras respuestas...

Sam Loyd

Samuel Loyd (1841-1911) fue el mayor creador de acertijos de los Estados Unidos. Pronto se aficionó por artes tan curiosas como la magia, la mímica, la ventriloquia, el recorte rápido de siluetas en hojas de papel negro (aunque quizá también fuera aficionado al recorte rápido de siluetas en hojas de papel de otros colores…) o el ajedrez. Sam aprendió a jugar a ajedrez a los 10 años. A los 14 años publicó su primer problema de ajedrez y en pocos años se le reconoció como el mejor compositor de problemas de ajedrez del país. En esa época existía un enorme interés popular en el ajedrez. Loyd colaboró con muchas publicaciones y condujo columnas de ajedrez en diarios y revistas. En algunas de ellas, en las que se suponía que los lectores tenían que enviar problemas, él mismo era su mejor colaborador, ocultando su identidad tras nombres como W. King, A. Knight y W. K. Bishop (si no te ha hecho gracia, coge tu diccionario de inglés y busca los nombres de las piezas del ajedrez). Los problemas de ajedrez de Loyd usaban todas las tretas y trucos imaginables: soluciones que dependían de capturas al paso, mates "en medio movimiento" que requerían completar un enroque… Sin embargo, Loyd no se destacó mucho en los torneos de ajedrez, aunque cuentan, por ejemplo, que durante un torneo en París anunció un mate en 8 movimientos y, tras explicárselo cuidadosamente a su contrincante, éste abandonó. Más tarde se descubrió que el contrincante tenía una excelente posibilidad de ganar, pero los jueces dieron como ganador a Loyd, pues su oponente había aceptado la derrota. Después de 1870, el interés de Loyd por el ajedrez comenzó a disminuir y se concentró en los acertijos matemáticos, los cuales ideó con una gracia y originalidad nunca superadas. Su "rompecabezas 14-15" fue una locura no sólo nacional sino también fuera de los Estados Unidos. Más tarde, en 1896, Loyd patentaría su más notable invención mecánica "Get off the Earth" (en la imagen inferior), del que ya os hablamos en una hoja anterior (al girar la tierra un chino desaparece). En esta hoja analizamos el problema que puso el mundo patas arriba: el 14-15.

EL PROBLEMA 14-15

FIG. 1 Así es como está la cosa

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

FIG. 2 Y así queremos dejarla

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

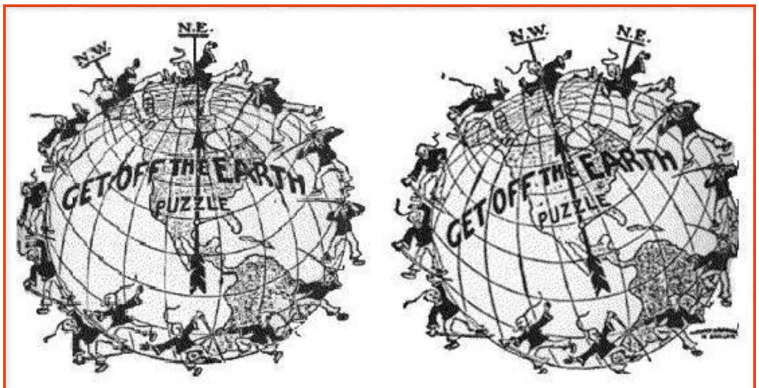
En la década de 1870 el mundo enloquecía con una cajita de bloques móviles que se conoció bajo el nombre de rompecabezas 14-15. Los 15 bloques estaban dispuestos dentro de la caja cuadrada en orden, pero con el 14 y el 15 invertidos, como se ve en la ilustración (y en la figura 1 mejor todavía). El problema consistía en desplazar los bloques, uno por vez, hasta lograr corregir el error del 14 y el 15 (figura 2).

El premio de 1000 $, ofrecido a quien presentara la primera solución correcta al problema, jamás ha sido otorgado, aunque miles de personas dijeron haber llevado a cabo la proeza. Hasta tal punto llegó el trastorno ocasionado por el problema, que se cuentan ridículas historias de comerciantes que dejaron de abrir sus comercios, un clérigo que pasó toda una noche de invierno bajo un farol tratando de recordar cómo había resuelto el problema, pilotos que encallaron sus barcos, maquinistas que no detenían sus trenes en las estaciones o granjeros que abandonaron sus cosechas (como muestra la ilustración). ¿Por qué nadie era capaz de recordar la secuencia de movimientos mediante los cuales había logrado resolver el problema? Muy sencillo, el problema es imposible de resolver, y Sam Loyd lo sabía. De hecho, cuando el editor de un periódico neoyorquino se quedó dudando ante la propuesta de Loyd de ofrecer 1000 $ a quien lo resolviera, éste dijo que estaba dispuesto a aportar la suma de su propio bolsillo.

Para entender por qué no se puede volver a "la posición 14-15" (figura 2) a partir de "la posición 15-14" (figura 1), imaginemos que en el hueco insertáramos un nuevo bloque etiquetado con el número 16. Entonces, cada posición del tablero podría quedar representada por una permutación de los números del 1 al 16 (un elemento de S_{16} para los que hayan aprobado Álgebra I). Además, cada movimiento se identifica con una trasposición (cambiar un número por otro), de hecho con una trasposición del 16 con otro número (no todas las trasposiciones son movimientos válidos pero sí que todos los movimientos válidos son trasposiciones de este tipo). La permutación inicial que nos dan (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16) es impar porque se obtiene a partir de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16) mediante un número impar de trasposiciones, de hecho, una sóla, cambiar el 14 por 15 (ojo, esto no es un movimiento válido en el juego, es sólo la definición de paridad de una permutación). Cualquier combinación de trasposiciones del 16 con otros números, tal que comience y termine con el 16 en la misma posición, es par, pues el 16 sube tantas veces como baja y se mueve a la izquierda tantas veces como a la derecha (si se quiere, se puede pintar el tablero de 4x4 como un tablero de ajedrez y observar que en cada movimiento el 16 se mueve de una casilla de un color a otra de color contrario). Luego por muy ingeniosos que seamos al hacer nuestros movimientos desde la posición inicial (impar), al volver a dejar el 16 en la esquina estaremos en una permutación impar (habremos hecho un número par de movimientos) que obviamente no podrá ser la configuración par que buscamos.

Sin embargo, y después de decir todo eso, afirmamos que somos capaces de poner los números del 1 al 15 en las casillas que indica la figura 2, mediante movimientos legales. ¿Cómo es posible semejante contradicción? Bueno, no hemos dicho para dónde iban a mirar los números... ¿Qué tal si giramos el tablero?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	



La respuesta al problema anterior

Dichosos cocos, dichoso mono… Este mes era difícil, ¿eh? Bueno, vamos con la solución: En el montón de cocos había un número de cocos, digamos k. Supongamos que hubiera habido 4 cocos más, esto es, k+4. Entonces, cuando el primer náufrago hubiera hecho los 5 montones, no habría sobrado ningún coco y habría dejado allí 4(k+4)/5 cocos (obsérvese que de los (k+4)/5 que quita, él se quedaría todos menos uno, que es el que da al mono, llevándose tanto el mono como él los mismos cocos que en el problema original, sólo que dejando 4 más en el montón). De este modo, cuando llegara el segundo náufrago y dividiera los cocos en cinco montones, tampoco sobraría ninguno y dejaría allí (tras coger los suyos y el del mono) $4^2(k+4)/5^2$ cocos. El tercero dejaría $4^3(k+4)/5^3$, el cuarto dejaría $4^4(k+4)/5^4$, y el quinto dejaría $4^5(k+4)/5^5$. Si ahora quitamos los 4 cocos que habíamos añadido, tenemos que tener un múltiplo de 5, pues cada náufrago y el mono se han llevado los mismos cocos que en el problema original. Así, $4^5(k+4)/5^5 - 4 = 5n$ para algún n. O si se prefiere $4^5(k+4)/5^5 \equiv 4\ (5)$. Como $4^5 \equiv 4\ (5)$, tenemos $(k+4)/5^5 \equiv 1\ (5)$, o sea, $(k+4)/5^5 = 5m + 1$. Entonces $k = 5^6m + 3121$, esto es $k \equiv 3121\ (15625)$, que son todas las soluciones. La más pequeña es 3121 y luego tenemos: 18746, 34371, 49996, 65621, 81246, 96871... Enhorabuena a Raúl Osuna que lo ha resuelto de modo excelente. Sin duda, la solución del mes. También nuestra enhorabuena a Javier Ramos y Alejandro Bellogin que también llegan al 3121 mediante sendos programas de ordenador. El de este mes es más fácil (en el sentido de que hay menos cuentas) pero tendréis que tener una idea feliz. ¡Suerte!

El problema: los dos pastilleros

No, no son dos tipos de la ruta del bakalao… Resulta que el señor Norberto Ferrero padece una extraña enfermedad (conocida como "síndrome de Ferrero") que hace que todos los días deba tomar dos pastillas, una del tipo A y otra del tipo B. Estas pastillas son exactamente iguales en peso, color, sabor, olor, tamaño, forma… de modo que es imposible distinguirlas externamente y, sin embargo, es vital que Norberto se tome una pastilla de cada tipo cada día. Por eso, el señor Ferrero, muy organizado él, guarda las pastillas del tipo A en un pastillero marcado con la letra A y las pastillas del tipo B en un pastillero marcado con la letra B. Cada día, echa una pastilla del tipo B y otra pastilla del tipo A en su mano y se las traga. Pero hoy, después de echar la pastilla del tipo B, ha echado por accidente dos pastillas del tipo A en su mano, de modo que tiene 3 pastillas y no puede distinguir cuál de las tres es la del pastillero B. Para colmo de males, Norberto no quiere simplemente tirar las pastillas y coger otras dos, pues son unas pastillas muy caras. ¿Qué debe hacer para tomar ese día y los días siguientes una pastilla de cada tipo sin equivocarse y sin desperdiciar ninguna? Pensadlo, no es un juego de palabras ni una tontería y aunque parezca imposible se puede hacer.

Mandadnos vuestras soluciones (tanto al problema como al acertijillo) a hojavolanteuam@yahoo.es

Por cierto, los alumnos de institutos también podéis (de hecho debéis) contestar y ponednos en el mensaje de qué instituto sois.

Por último, si tenéis problemas o acertijos (¡o cosas!) no dudéis en enviárnoslos y lo mismo hasta aparecen en la hoja.

UAM

Departamento de Matemáticas. Escrito por Matías Núñez y Carlos Vinuesa.

Agradecemos su colaboración a Guillermo Martín.