

1. Para las funciones  $f(x) =$

$$\text{i. } x \operatorname{sen} x, \quad \text{ii. } xe^{-x^2}, \quad \text{iii. } x \log(x+1), \quad x \in [0, 1]$$

- utiliza las reglas simples del punto medio, del trapecio, de Simpson, y corregida del trapecio para aproximar el valor de  $\int_0^1 f(x)dx$ ;
- calcula el número de cifras decimales correctas que tendrá cada resultado según la correspondiente estimación teórica del error;
- calcula cada una de las integrales por medio de su primitiva y de los valores de ésta utilizando la calculadora; explica cualquier discrepancia significativa que observes;
- calcula el valor de cada una de las integrales con una aproximación de seis cifras decimales correctas utilizando las reglas compuesta del trapecio, de Simpson, y corregida del trapecio.

2. Utiliza la regla compuesta del trapecio con  $n = 12$  y la correspondiente regla corregida para calcular

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Compara el resultado obtenido con el valor verdadero de la integral.

- Repite el ejercicio anterior para la regla compuesta de Simpson con el mismo número de nodos. Compara los resultados obtenidos con ambos métodos.
- Utiliza en los dos problemas anteriores el método de extrapolación de Richardson en vez de las correspondientes reglas corregidas. (Para ello será necesario calcular el valor de las reglas compuestas con la mitad del número de nodos.) Compara los resultados obtenidos.

5.

a. Deduce la *regla de los tres octavos*: la integral  $\int_a^b f(x)dx$  se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado tres que interpola  $f$  con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad h = \frac{b-a}{3}.$$

b. Deduce la *regla de Boole*: la integral  $\int_a^b f(x)dx$  se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado cuatro que interpola  $f$  con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad h = \frac{b-a}{4}.$$

c. Utiliza las reglas de los *tres octavos* y de Boole para aproximar

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

y compara el resultado obtenido con el valor verdadero de esta integral.

- Determina para qué polinomios son exactas las reglas del punto medio, del trapecio, y de Simpson. Conjetura para qué polinomios serán exactas las reglas de los tres octavos y de Boole. (Es difícil verificar esta última conjetura.)
- Utiliza la fórmula del error en la regla compuesta del trapecio para determinar el número de veces que debe aplicarse la regla simple para calcular las siguientes integrales con error menor que  $10^{-6}$

$$\text{a. } \int_0^{\pi/2} \cos x dx; \quad \text{b. } \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad \text{c. } \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx.$$

8. Repite el problema anterior para la regla de Simpson.

9. **(Programa)** Escribe un programa que calcule  $I = \int_1^3 5xe^{-x} \ln x dx$  usando la regla del trapecio para valores de  $n$  desde 1 hasta 20. El valor de  $I$  con 10 decimales correctos es  $I = 1'5282059280$ . Compara el error cometido al usar la regla del trapecio con el error teórico deducido para esta regla (haz que aparezcan estas diferencias en dos columnas paralelas para establecer la comparación). Finalmente, comprueba empíricamente la estimación asintótica del error para la regla del trapecio.