50. Sea $f(x) =$

$$\textbf{i.}\ x \operatorname{sen} x, \qquad \textbf{ii.}\ xe^{-x^2}, \qquad \textbf{iii.}\ x\log(x+1), \qquad x \in [0,1].$$

a. Utiliza las reglas simples del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^1 f(x)dx$.
b. Calcula el número de cifras decimales correctas que tendrá cada resultado según la correspondiente estimación teórica del error.
c. Calcula cada una de las integrales por medio de su primitiva y de los valores de ésta utilizando la calculadora; explica cualquier discrepancia significativa que observes.
d. Aplica las reglas corregidas a cada uno de los resultados obtenidos.
e. Calcula el valor de cada una de las integrales con una aproximación de seis cifras decimales correctas utilizando las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson.

51. Utiliza la regla compuesta del trapecio con $n = 12$ y la correspondiente regla corregida para calcular

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Compara el resultado obtenido con el valor verdadero de la integral.

52. Repite el ejercicio anterior para la regla compuesta de Simpson con el mismo número de nodos. Compara los resultados obtenidos con ambos métodos.

53. Utiliza en los dos problemas anteriores el método de extrapolación de Richardson en vez de las correspondientes reglas corregidas. (Para ello será necesario calcular el valor de las reglas compuestas con la mitad del número de nodos.) Compara los resultados obtenidos.

54. **a.** Deduce la *regla de los tres octavos*: la integral $\int_a^b f(x)dx$ se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado tres que interpola f con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \qquad i = 0, 1, 2, 3; \qquad h = \frac{b-a}{3}.$$

b. Deduce la *regla de Boole*: la integral $\int_a^b f(x)dx$ se aproxima por medio de la integral del polinomio de grado cuatro que interpola f con nodos en los puntos

$$x_i = a + ih; \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4; \qquad h = \frac{b-a}{4}.$$

c. Utiliza las reglas de los *tres octavos* y de Boole para aproximar

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

y compara el resultado obtenido con el valor verdadero de esta integral.

55. Determina para qué polinomios son exactas las reglas del punto medio, del trapecio, y de Simpson. Conjetura para qué polinomios serán exactas las reglas de los tres octavos y de Boole.

56. Utiliza la fórmula del error en la regla compuesta del trapecio para determinar el número de veces que debe aplicarse la regla simple para calcular las siguientes integrales con error menor que 10^{-6}

$$\textbf{a}.\ \int_0^{\pi/2} \cos x dx; \qquad \textbf{b}.\ \int_0^1 e^{-x^2}dx; \qquad \textbf{c}.\ \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx.$$

57. Repite el problema anterior para la regla de Simpson.

58. **(Programa)** Escribe un programa que calcule $I = \int_1^3 5xe^{-x} \ln x\, dx$ usando la regla del trapecio para valores de n desde 1 hasta 20. El valor de I con 10 decimales correctos es $I = 1'5282059280$. Compara el error cometido al usar la regla del trapecio con el error teórico deducido para esta regla (haz que aparezcan estas diferencias en dos columnas paralelas para establecer la comparación). Finalmente, comprueba empíricamente la estimación asintótica del error para la regla del trapecio.

59. **(Programa)** Escribe un programa que calcule $I = \int_1^3 5xe^{-x} \ln x\, dx$ usando la regla de Simpson para valores pares de n desde 2 hasta 20. El valor de I con 10 decimales correctos es $I = 1'5282059280$. Compara el error cometido al usar la regla de Simpson con el error teórico deducido para esta regla (haz que aparezcan estas diferencias en dos columnas paralelas para establecer la comparación). Finalmente, comprueba empíricamente la estimación asintótica del error para la regla de Simpson.

60. Demuestra que si los puntos $x_0, \dots, x_n$ son simétricos respecto del centro m de un intervalo I, es decir $x_k + x_{n-k} = 2m$, y si n es par entonces el método $\int_I f \approx \int_I P_f^{x_0,\dots,x_n}$ es exacto para polinomios de grado $\leq n+1$.

61. Se quiere construir una tabla para la distribución normal

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

para $x > 0$, que produzca por interpolación lineal un error menor que $5 \cdot 10^{-6}$.
a. Determina cuál debe ser el paso de la tabla.
b. Determina con cuántas cifras decimales deben calcularse las integrales.
c. Calcula $N(1), N(2), N(3)$, y $N(4)$.

62. Calcula los nodos y los pesos de las cuadraturas de Gauss I_6 e I_7. (Tendrás que utilizar un método de aproximación de ceros de polinomios.)

63. Utiliza las cuadraturas de Gauss I_4 e I_5 para calcular el valor aproximado de

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

64. Utiliza la fórmula de Taylor con resto para calcular

$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

con error menor que 10^{-4}. Repite el cálculo utilizando la regla compuesta del trapecio. Compara el número de evaluaciones realizado en ambos métodos.

65. El teorema de los números primos establece que el número de primos en el intervalo $a < x < b$ es aproximadamente igual a

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}.$$

Utiliza esta fórmula para $a = 100$ y $b = 200$ y compara el resultado con el número exacto de primos en este intervalo.

66. La regla de integración de Lobatto aproxima $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$ mediante

$$L_n(f) = p_1 f(-1) + p_2 f(1) + \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)\,,$$

donde los pesos $p_1, p_2, w_1, \cdots w_n$ y los nodos $x_1, \cdots x_n$ se calculan imponiendo que integre de manera exacta todos los polinomios de grado menor o igual que $2n+1$. Escribe el sistema cuya solución son estos pesos y estos nodos. Encuentra los valores de los pesos y los nodos para $n = 2$. Aproxima

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/3} dx \qquad \text{mediante } L_2(f).$$

67. (Programa) Usa las fórmulas de integración gaussiana con número de nodos desde 1 hasta 7 para escribir un programa que calcule

$$I = \int_1^3 5xe^{-x} \ln x \, dx$$

Observa la velocidad de convergencia de este tipo de integración.

68. Utiliza la cuadratura de Lobatto para calcular

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/3}$$

con tres cifras decimales correctas.

69. Usa las ideas consideradas para las cuadraturas gaussianas, para hallar una fórmula de cuadratura de la forma

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \equiv I_2(f)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 3. Aplica esta fórmula para aproximar $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx = 0'37894469164$.