Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico

Prácticas

Capítulo 5. Diferencias finitas para la ecuación de ondas.

5.1 Resolviendo la ecuación de ondas

Vamos a resolver la ecuación de ondas utilizando un método de diferencias finitas. La técnica no es muy distinta de la que usamos con la ecuación del calor. Centrémonos en la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

en una dimensión espacial, en el intervalo $[0,1]$, para tiempos entre 0 y t_f, con condiciones de contorno:

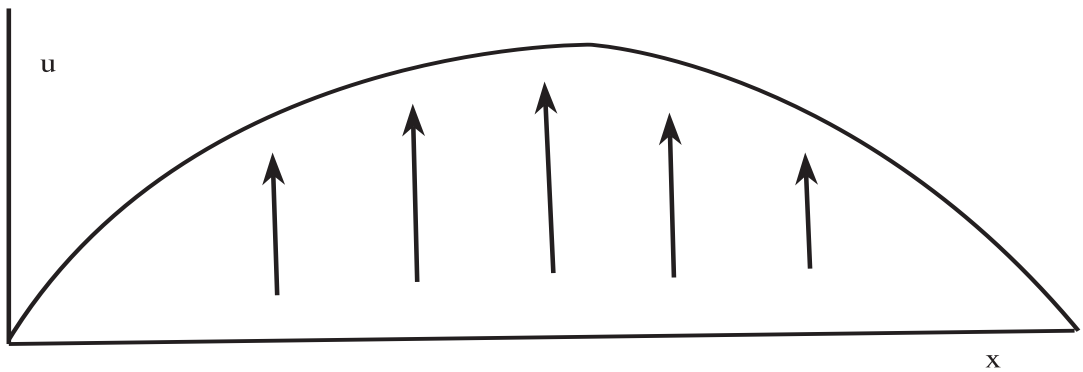
$$u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0$$

y con condiciónes iniciales:

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

Con estas ecuaciones podemos modelizar el comportamiento de una cuerda elástica tensada con sus dos extremos fijos (entre otras cosas). Para empezar, estudiaremos el caso:

$$f(x) = \sin(\pi x) + 0.5\sin(3\pi x)$$
$$g(x) = 0$$



Para resolver la ecuación, la interpretamos como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en las que un valor inicial u que contiene los desplazamientos de las distintas posiciones de la cuerda evoluciona según una EDO de segundo orden. Es necesario utilizar una versión *discreta* del valor inicial para poder representarlo en el ordenador mediante un vector. Descomponemos el intervalo [0, 1] en M partes iguales, obteniendo un mallado uniforme $x_1 = 0, ..., x_{m+1} = x_1 + m/M, x_{M+1} = 1$, y consideramos los valores de u sólo en esos puntos. Nuestro dato inicial es:

$$\hat{u}^0 = (\hat{u}_m^0)_{m=1}^{M+1},\ \hat{u}_m^0 = \sin(\pi x_m) + 0.5\sin(3\pi x_m)$$

Nuestro objetivo es encontrar valores $\hat{u}_m(t)$ que aproximen el valor de la función u en el punto x_m y en el instante t. Los valores de u en los puntos x_1 y x_{M+1} son datos del problema (los datos de contorno), de modo que sólo falta encontrar valores que aproximen u en los puntos desde x_2 hasta x_M (un total de $M - 1$ puntos). Queremos encontrar una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con la variable $\hat{u}$, del tipo:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} = F(\hat{u})$$

donde $F(\,\cdot\,)$ es una función que actúa sobre vectores de $\mathbb{R}^{M-1}$ y debe aproximar $c^2 u_{xx}$. Ya hemos visto cómo hacer ésto al estudiar la ecuación del calor en el capítulo 3.1, cuando las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet homogéneas. Definimos $h = 1/M$ y utilizamos diferencias centradas para aproximar la segunda derivada de u:

$$\hat{u}_{xx}(x_m) \approx \frac{1}{h^2}(\hat{u}_{m-1} - 2\hat{u}_m + \hat{u}_{m+1})$$

Al igual que hicimos en 3.1, escribimos nuestras aproximaciones a las derivadas $u_{xx}(x_m)$ como el producto de una matriz D por el vector $\hat{u}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{xx}(x_2) \\ \hat{u}_{xx}(x_3) \\ \vdots \\ \hat{u}_{xx}(x_M) \end{pmatrix} \approx D \cdot \hat{u} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_M \end{pmatrix}$$

En la primera y en la última filas hemos utilizado la condición de frontera:

$$\hat{u}_{xx}(x_2) \approx \frac{1}{h^2}(\hat{u}_1 - 2\hat{u}_2 + \hat{u}_3) = \frac{1}{h^2}(-2\hat{u}_2 + \hat{u}_3)$$
$$\hat{u}_{xx}(x_M) \approx \frac{1}{h^2}(\hat{u}_{M-1} - 2\hat{u}_M + \hat{u}_{M+1}) = \frac{1}{h^2}(\hat{u}_{M-1} - 2\hat{u}_M)$$

Ahora la EDO para $\hat{u}$ es:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} = c^2 D \cdot \hat{u}$$
$$\hat{u}(0) = \hat{u}^0$$

Es decir, en este caso $F(\hat{u}) = c^2 D \cdot \hat{u}$.

Para estudiar una EDO de segundo orden podemos escribirlo como un sistema de ecuaciones de primer orden, o podemos usar diferencias centradas para aproximar las derivadas temporales (usando un paso temporal Δt pequeño):

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2}(\hat{u}(t_{n-1}) - 2\hat{u}(t_n) + \hat{u}(t_{n+1}))$$

Utilizando esta aproximación podemos deducir un esquema numérico:

$$\hat{u}^{(n+1)} = 2\hat{u}^{(n)} - \hat{u}^{(n-1)} + (\Delta t)^2 \cdot F(\hat{u})$$

Observamos que la fórmula anterior necesita los dos vectores anteriores, el $\hat{u}^n$ y el $\hat{u}^{n-1}$ para poder calcular el paso siguiente $\hat{u}^{n+1}$. Por lo tanto, no se puede aplicar directamente para calcular el primer paso. Para $n = 0$ debemos usar la aproximación de la velocidad inicial u_t:

$$\frac{\hat{u}_m^{(1)} - \hat{u}_m^{(-1)}}{2\Delta t} \approx \frac{d\,\hat{u}}{dt}(x_m) = g(x_m)$$

$$\hat{u}_m^{(-1)} = \hat{u}_m^{(1)} - 2(\Delta t)g(x_m)$$

que sustituimos en nuestro esquema:

$$u_m^{(1)} = 2u_m^{(0)} - u_m^{(-1)} + (\Delta t)^2 \cdot F(\hat{u}^{(0)})$$

para calcular el primer paso en tiempo a partir de los datos iniciales:

$$u_m^{(1)} = g(x_m)\Delta t + u_m^{(0)} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \cdot F(\hat{u}^{(0)})$$

Escribimos un script de matlab que implementa la idea anterior.

```
function [u_save,x,t_save]= ondas(c, L, t_f, M,tsteps);
```

```
%function [u_save,x,t_save]= ondas(c, L, t_f, M,tsteps);
%
%Resuelve u_tt - c2 u_xx = 0 mediante un esquema explicito de segundo orden
%
%Datos de entrada:
% c: coeficiente c de la ecuacion
% L: longitud del intervalo
% M: numero de partes iguales en que se descompone [0,L]
% t_f: instante de tiempo hasta el que calculamos la solucion
% tsteps:numero de partes iguales en que se descompone [0,t_f]

%%Mallado
dt=t_f/tsteps;
tiempos=0:dt:t_f;
h=L/M;
x=0:h:L;

%%Condiciones iniciales
f=(sin(pi*x)+0.5*sin(3*pi*x))';
g=zeros(M+1,1);

%%El operador D
%Usamos el comando diag(vector,k) para crear una matriz tridiagonal
Tridiag = diag(-2*ones(M-1,1)) + diag(ones(M-2,1),1) + diag(ones(M-2,1),-1);
D=(1/h^2)*Tridiag;

%%Datos de salida: en vez de guardar todos los datos intermedios,
%guardamos el vector u solo Nframes veces.
Nframes=11;
marca=floor(tsteps/(Nframes-1));
u_save=zeros(M+1,Nframes);
t_save=zeros(1,Nframes);

%Le ponemos las condiciones de frontera
u_save(1,:)=zeros(1,Nframes);
u_save(M+1,:)=zeros(1,Nframes);
%guardamos la posicion de partida
u_save(:,1)=f;
t_save(1)=0;

% Posicion de partida
u=f(2:M);
% Calculo del primer paso temporal
u_ant=u;
g_red=g(2:M);
u = u + dt*g_red + 0.5*(dt^2)*(c^2)*D*u;

% Iteracion para el resto de pasos temporales
%Bucle principal
for n=1:tsteps
   temp=u;
   u = 2*u - u_ant + (dt^2)*(c^2)*D*u;
   u_ant=temp;

   %Guardamos los valores de u para algunos tiempos
   if mod(n,marca)==0
```

```
      indice = 1 + n/marca;
      u_save(2:M,indice)=u;
      t_save(indice)=tiempos(n);
   end
end
```

Probamos el resultado:

```
[u,x,t]=ondas(1,1,0.2,100, 1000);
figure;
plot(x,u(:,1))   %dibujamos la situacion inicial
figure;
plot(x,u(:,end)) %dibujamos la situacion final
figure;
plot(x,u)        %dibujamos todos los fotogramas a la vez
```

5.2 Estabilidad

Recordamos que al usar un esquema explícito, el método puede ser inestable si el paso de tiempo es demasiado corto. Para la ecuación de ondas, la condición de estabilidad (*condición de Courant*) es mucho más débil que para la ecuación del calor:

$$c\frac{\Delta t}{h} \leqslant 1$$

Comprobamos que el sistema se puede volver inestable si la condición de Courant no se satisface:

```
[u,x,t]=ondas(1,1,1,100, 90);
figure;
plot(x,u(:,end))   %dibujamos la situacion final
```

5.3 Ejercicios

Te proponemos algunos ejercicios para entender mejor la aproximación a la ecuación de ondas por diferencias finitas.

1. Cambia la condición inicial para que valga:

$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ (1-x) & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Prueba el resultado.

2. Cambia la condición inicial para que valga:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < a \\ x-a & \text{si } a \leqslant x < \frac{a+b}{2} \\ b-x & \text{si } \frac{a+b}{2} \leqslant x < b \\ 0 & \text{si } b \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$
$$u_t(x,0) = 0$$

   donde a y b son puntos cualquiera de la cuerda. Prueba el resultado con $a = 0.4$, $b = 0.6$.

3. Introducimos un término correspondiente a una fuerza externa, de modo que la ecuación queda de esta forma:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = E(t,x)$$

   donde $E(t,x)$ es una fuerza externa.

Realiza los cambios necesarios en el código para incorporar este nuevo término, usando cualquiera de las condiciones iniciales anteriores. Prueba el resultado para distintas frecuencias ω y distintos tiempos finales cuando:

$$E(t,x) = \sin(x\pi)\sin(\omega t)$$