Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico

Prácticas

Capítulo 4. Series de Fourier.

4.1 Serie de Fourier

Vamos a intentar representar algunas funciones por su serie de Fourier de senos. Tomamos una función $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$. Representar esta función por su serie de senos consiste en escribirla en la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Para coeficientes b_n adecuados. Hemos visto en las clases de teoría que los coeficientes vienen dados por:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Escribimos un código que calcula estos coeficientes para la función

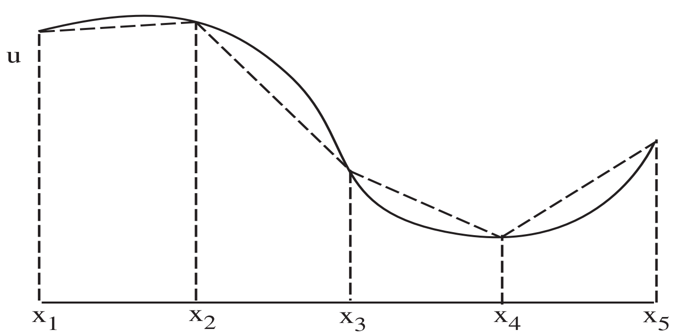
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1/2 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 1/2 \end{cases},$$

definida en el intervalo $[0, 1]$. Para comenzar, creamos un fichero `funcion.m` que contiene la función f:

```
function y=efe(x)
%function y=efe(x)
%Acepta un vector como argumento

n=length(x);
mitad=floor(n/2);
y=[x(1:mitad), 1-x(mitad+1:n)];
```

A continuación creamos otro fichero que calcula los coeficientes b_n. Para poder aproximar las integrales, utilizamos la regla del trapecio. Según esta regla, podemos aproximar la integral definida de una función g en el intervalo $[0, L]$ por la suma de las áreas de trapecios:



El área del trapecio cuya base es el segmento $[x_1, x_2]$ es igual al producto de la base: $x_2 - x_1 = h$, por el promedio de las alturas: $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$. Nuestra aproximación a $\int_{x_1}^{x_5} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$ es igual a la suma de las áreas de todos los trapecios.

```
function c=fourier_coef(n,L,M)
%function c=fourier_coef(n,L,M)
%
%Calcula un coeficiente de Fourier de la funcion definida en el archivo funcion.m
%n es el indice del coeficiente que queremos calcular
%L es la longitud del intervalo
%M es el numero de subintervalos en que descomponemos,

paso=L/M;
x=0:paso:L;

%Valores de la funcion f(x)*sin(pi*n*x/L)
fseno=efe(x).*sin((pi*n/L)*x);

%Integral por la regla del trapecio
integral=0;
for i=1:M
    integral = integral + paso*(fseno(i)+fseno(i+1))/2;
end

c=(2/L)*integral;
```

Error al calcular los coeficientes de Fourier

Vamos a detenernos un momento para estudiar si nuestra aproximación a los coeficientes de Fourier es buena. Para la función anterior, podemos calcular los coeficientes de forma exacta. El primer coeficiente es:

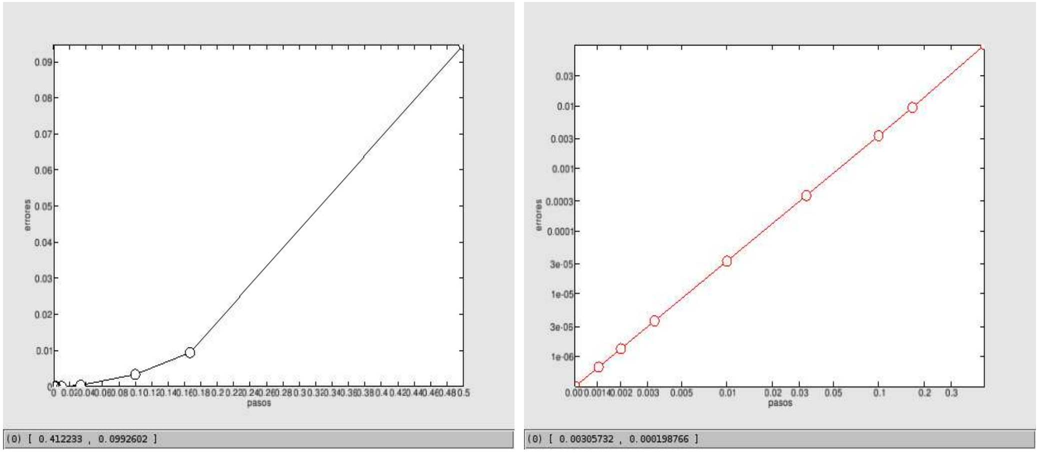
$$b_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(x\pi)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\sin(x\pi)dx$$
$$b_1 = -\frac{2}{\pi}x\cos(x\pi)|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x\pi)dx - \frac{2}{\pi}\cos(x\pi)|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{2}{\pi}x\cos(x\pi)|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(x\pi)dx$$
$$b_1 = 0 + \frac{2}{\pi^2}\sin(x\pi)|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\sin(x\pi)|_{\frac{1}{2}}^1$$
$$b_1 = \frac{4}{\pi^2}$$

Veamos que tal aproxima la función `fourier_coef` a este valor:

```
L=1;
bexacto=4/pi^2;
pasos=[];errores=[]; %vectores con los pasos temporales y los errores
for M=[2 6 10 30 100 300 500 700 1000]
   pasos=[pasos, 1/M]; %engordamos los vectores sobre la marcha
   errores=[errores, abs(fourier_coef(1,L,M)-bexacto)];
end
figure;
plot(pasos, errores,'-o')
figure;
```

```
loglog(pasos, errores,'-o') %Dibujamos los errores en una grafica logaritmica
```

En la gráfica de la izquierda hemos dibujado los errores al calcular el coeficiente de Fourier, y en la gráfica de la derecha vemos los mismos errores, pero en una gráfica logarítmica.



En la gráfica logarítmica vemos claramente una línea recta, lo que sugiere que el logaritmo del error es aproximadamente propocional al logaritmo del paso:

$$\log(\text{error}) \simeq s \log(\text{paso}) + e$$

donde s es la pendiente de la recta. Despejando los logaritmos:

$$\text{error} = C\,\text{paso}^s$$

Calculando la pendiente de la recta por algún procedimiento de regresión podemos ver que la pendiente s es aproximadamente igual a 2. Esto sugiere que el método del trapecio es un método de orden 2: es decir, que el error cometido es proporcional al paso elevado al cuadrado. Es posible confirmar este hecho teóricamente con métodos similares a los que usamos en clase para estudiar el error de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, pero no es parte del temario de esta asignatura.

Aproximación a f

Usando estas dos funciones, podemos calcular los coeficientes b_n y nuestra aproximación a f usando sólo algunos términos de la serie de Fourier.

```
N=6;    %Numero de terminos de la serie
L=1;    %Longitud del intervalo
M=100;  %Numero de subintervalos al usar la regla del trapecio

%Coeficientes b_n
b=zeros(1,N);
for n =1:N
    b(n)=fourier_coef(n,L,M);
end

%Evaluamos la funcion y su aproximacion en un conjunto de puntos,
%para poder dibujarlas con matlab
%El numero de puntos afecta a la calidad de la grafica,
```

```
%pero no al error de aproximacion
h=L/500;  %tomamos 500 puntos en la grafica
x=0:h:L;
foriginal=efe(x);
faproximacion=zeros(1,length(x));
for n =1:N
   faproximacion = faproximacion + b(n)*sin((n*pi/L)*x);
end

%Dibujamos la funcion y su aproximacion
figure
plot(x,[foriginal;faproximacion])
```

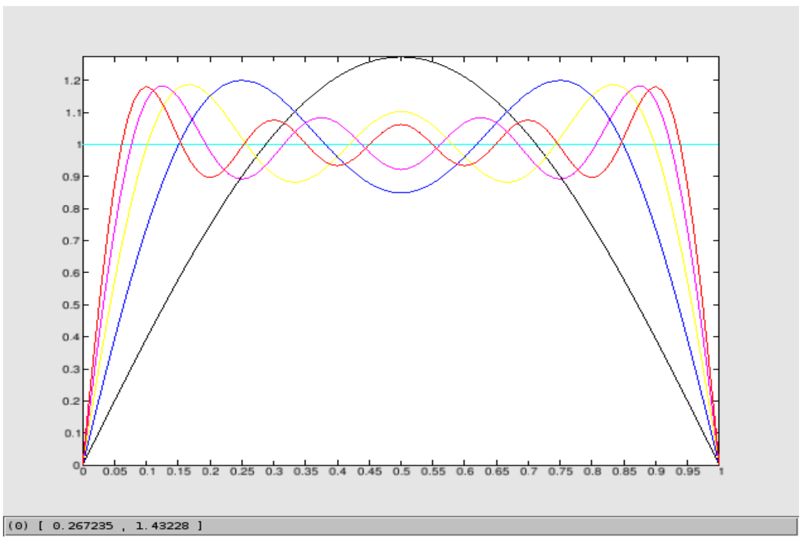
También podemos cambiar el último bloque de código para dibujar todas las aproximaciones a la vez:

```
%Dibujamos todas las aproximaciones a la vez
foriginal=funcion(x);
f_plot=[foriginal];
faproximacion=zeros(1,length(x));
for n =1:N
   faproximacion = faproximacion + b(n)*sin((n*pi/L)*x);
   f_plot=[f_plot ; faproximacion];
end
plot(x,f_plot)
```

4.2 Fenómeno de Gibbs

Ejercicio: haz los cambios necesarios para calcular la aproximación con series de Fourier a la función $f(x)=1$ para cualquier punto x en el intervalo $[0,1]$.

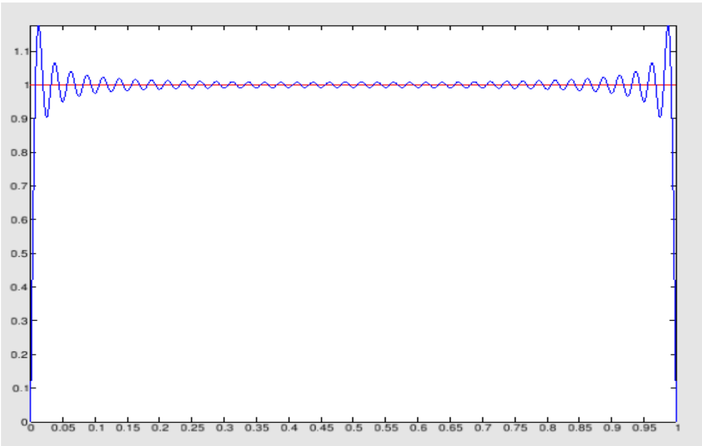
Si dibujamos todas las aproximaciones a la función f, observamos una imagen similar a la de debajo.



Si has manejado la bibliografía, quizá te recuerde a la imagen de la portada del libro de Haberman: "Ecuaciones en derivadas parciales con Series de Fourier y problemas de contorno". Esta imagen muestra las funciones:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

para unos cuantos valores de N. La teoría nos asegura que cuando $N \to \infty$, las funciones f_N se aproximan cada vez más a la función original f, pero sólo en los puntos interiores. En los dos extremos del intervalo, cualquiera de la funciones f_N toma el valor 0, y crece en un intervalo muy corto para adoptar el valor 1. Al hacerlo, se *pasa de largo*. La cantidad que se pasa de largo está en torno al 17% de la magnitud de la discontinuidad, y no desaparece al aumentar el número de términos, aunque cada vez afecte a un entorno más pequeño de la discontinuidad. Puedes comprobarlo utilizando un número mayor de términos. Debajo puedes ver el resultado de aproximar la función f con 80 términos.



4.3 Solución exacta y solución por diferencias finitas de la ecuación del calor

Utilizando los coeficientes b_n del apartado anterior, tratamos de resolver la ecuación del calor homogénea con dato inicial igual a la función $f(x)$ del apartado 4.1. La ecuación que consideramos es:

$$u_t = k\, u_{xx}$$

en el intervalo $[0, 1]$, con $k = 0.1$ y con datos de frontera:

$$u(t, 0) = 0$$
$$u(t, 1) = 0$$

El dato inicial se escribe del modo siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{L})$$

Como habéis visto en las clases de teoría, la solución de la ecuación del calor en esta situación admite la siguiente expresión:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

El código siguiente permite calcular la temperatura al cabo de un tiempo t con los valores aproximados de los coeficientes b_n que calculamos antes con la regla del trapecio. Asumimos que estos valores siguen almacenados en el vector `b`.

```
t_f=1   %Tiempo en el que calculamos u
k=0.1   %Constante de la ecuacion del calor
h=0.01;   %Paso
x=0:h:L;
u_f=zeros(1,length(x));
for n =1:N
   u_f = u_f + exp(-k*(pi*n/L)^2*t_f)*b(n)*sin((n*pi/L)*x);
end

%Dibujamos la funcion u en el instante u_f
figure
plot(x,u_f)
```

Recordamos que al usar el método de diferencias, podíamos cambiar dos parámetros que afectaban a la precisión de la solución obtenida: el número de pasos en la discretización espacial y el número de pasos en la discretización temporal. Al usar el método de los coeficientes de Fourier, podemos cambiar dos parámetros distintos: por un lado el número de términos en la serie de Fourier, y por otro lado la precisión usada para evaluar los coeficientes de Fourier, que depende del número de subintervalos usados en el método del trapecio. Estos parámetros no son comparables. En realidad, ambos métodos son muy distintos, y no tiene sentido compararlos desde un punto de vista numérico. La solución teórica del problema nos permite comprender la ecuación del calor a un nivel más fundamental y responder a preguntas más sofisticadas, mientras que la solución por diferencias finitas es más flexible, responde mejor si el dato inicial es discontinuo, y ofrece una mejor aproximación con menos tiempo de cómputo.

4.4 Applet de series de Fourier

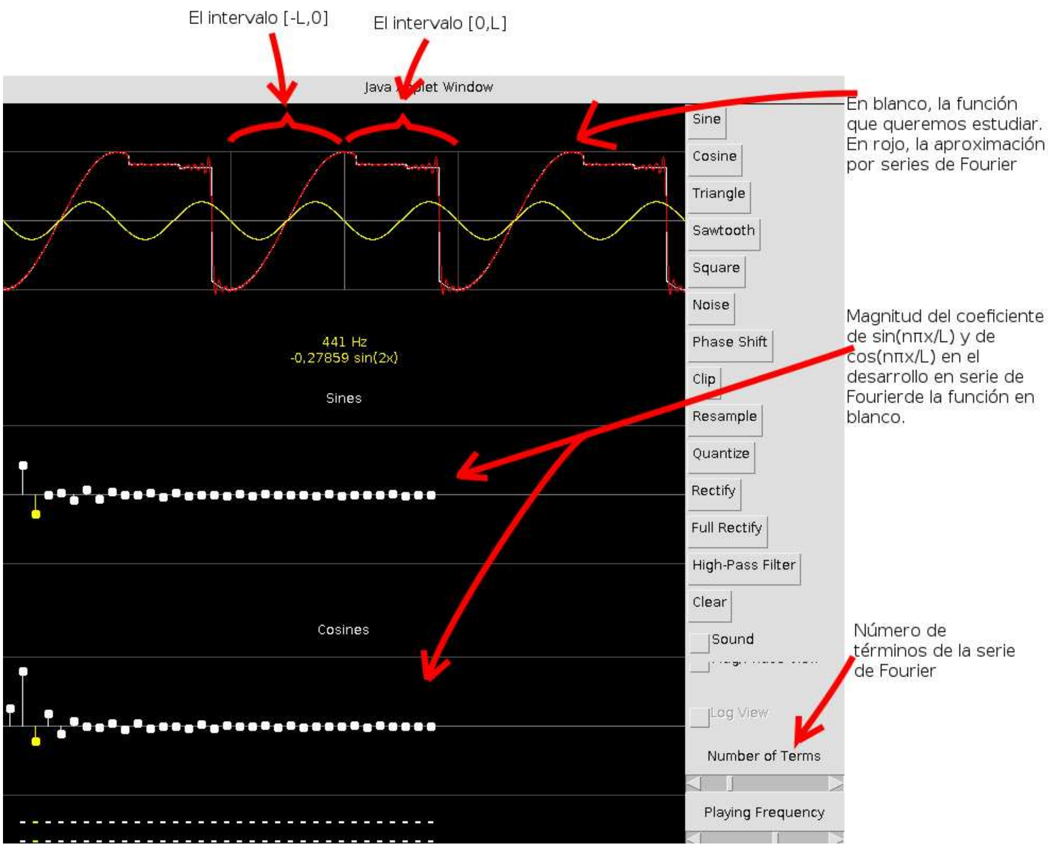
En la página web:

http://www.falstad.com/fourier/

o, temporalmente, en la web de la UAM:

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/pangulo/edpan/fourier/

puedes ver un applet de series de Fourier que calcula los coeficientes de Fourier de una función. En el applet, podemos modificar con el ratón tanto la función como los coeficientes de Fourier. También podemos cargar algunas funciones habituales pulsando los botones: `Sine`, `Cosine`, `Triangle`, etc. Es fácil apreciar en el applet la diferencia entre la serie de senos, la serie de cosenos, y la serie de senos y cosenos. La serie de senos y cosenos aproxima la función en el intervalo $[-L, L]$, mientras que la serie de senos aproxima la extensión impar de la función en el intervalo $[0, L]$ y la serie de cosenos aproxima la extensión par de la función en ese mismo intervalo. Por ejemplo, si la función que aproximamos es impar, los coeficientes de la serie de cosenos son nulos, y si es par, los coeficientes de la serie de senos son nulos.


El intervalo [-L,0]
El intervalo [0,L]
En blanco, la función que queremos estudiar. En rojo, la aproximación por series de Fourier
Magnitud del coeficiente de sin(nπx/L) y de cos(nπx/L) en el desarrollo en serie de Fourierde la función en blanco.
Número de términos de la serie de Fourier
441 Hz
-0,27859 sin(2x)
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Log View
Number of Terms
Playing Frequency