Cuentas, trucos y casi magia

Fernando Chamizo Lorente

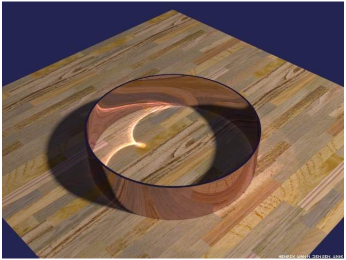
http://www.uam.es/fernando.chamizo

Universidad Autónoma de Madrid

8 de noviembre de 2012

Curvas misteriosas

Cuando pones una taza o incluso un anillo bajo una taza o incluso un anillo bajo una fuente de luz oblicua. Hay un reflejo con una curiosa forma:

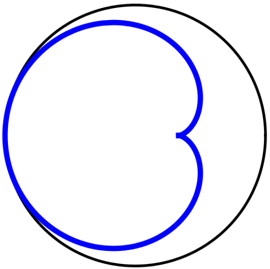


http://graphics.ucsd.edu/~henrik

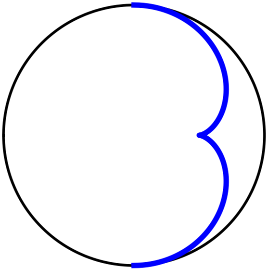
Foto casera

El efecto requiere que la fuente sea puntual. Es claro con una bombilla, una linterna o un foco halógeno pero no con un fluorescente. Es muy fácil verlo bajo estas condiciones. ¡Inténtalo en casa y verás que te sale!

Si acercamos la fuente de luz hasta el borde del anillo, el reflejo se encoge hasta dar una curva tangente en un solo punto.



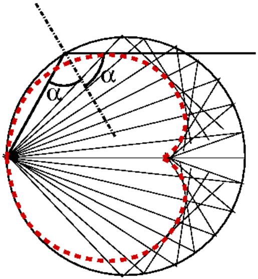
Luz en el borde

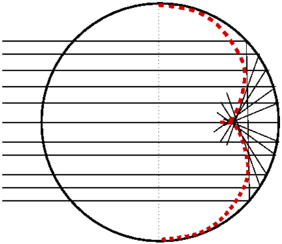


Luz lejana

- ¿Por qué se ven estas figuras?
- ¿Se pueden describir fácilmente?

¿Por qué se ven estas figuras?



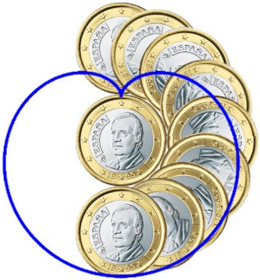


Los rayos de luz se reflejan en el borde circular dando lugar a rayos reflejados que son tangentes a cierta curva. A lo largo de la ella se produce una acumulación e interferencia de rayos que muestra una zona especialmente iluminada, igual que se produce un brillo cuando rayos separados se juntan gracias a una lupa.

¿Se pueden describir fácilmente?

Ambas curvas aparecen fácilmente con medios mecánicos.

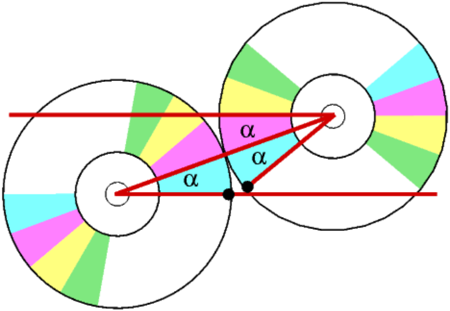
La primera curva se llama **cardioide** (porque recuerda a un corazón) y surge de manera natural cuando hacemos girar sin deslizar un círculo sobre otro del mismo tamaño. Viene descrita por la trayectoria de cada punto del borde.



La segunda curva, una vez duplicada, se llama **nefroide** (porque recuerda a un riñón) y se obtiene de forma similar cuando el círculo que gira es de la mitad de radio.

Una curiosidad, no demasiado intuitiva es que el círculo (la moneda) que gira da dos vueltas sobre sí misma en vez de una.

¿No te lo crees? Compruébalo. En la práctica, las monedas de euro resbalan. Con CDs es más fácil verlo en la práctica, usando el agujero central para ir desplazando el CD que gira.

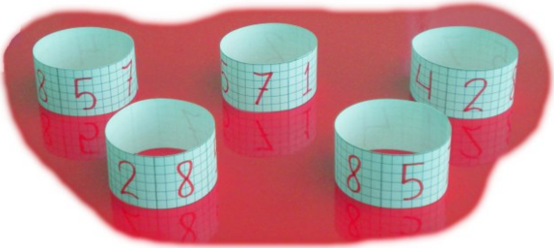


Respecto a la horizontal

$\alpha =$ giro del centro

$\alpha + \alpha =$ giro del punto

Números redondos



La cinta:

1	**4**	**2**	**8**	**5**	**7**

Las cuentas y la magia

1. Elige una cinta mágica
2. Piensa un número del 1 al 6
3. Multiplica 142857 por ese número
4. Y... un corte de la cinta dará el resultado

$$6 \;\to\; 6 \times 142857 =$$

¿Dónde está el truco?

El número 142857 es un **número cíclico**: las *permutaciones cíclicas* de sus dígitos dan múltiplos sucesivos.

$$
\begin{aligned}
1 \times 142857 &= 142857\\
2 \times 142857 &= 285714\\
3 \times 142857 &= 428571\\
4 \times 142857 &= 571428\\
5 \times 142857 &= 714285\\
6 \times 142857 &= 857142
\end{aligned}
$$

¿Por qué ocurre esto?

Dividiendo como en los viejos tiempos:

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
\mathbf{1} & 0 & & & & & & \underline{7\qquad\qquad} \\
 & {\color{red}3} & 0 & & & & & 0.142857\ldots \\
 & & {\color{red}2} & 0 & & & & \\
 & & & {\color{red}6} & 0 & & & \\
 & & & & {\color{red}4} & 0 & & \\
 & & & & & {\color{red}5} & 0 & \\
 & & & & & & {\color{red}1} &
\end{array}
$$

Los restos parciales son 1,2,3,4,5,6 ¡Salen todos los posibles!
Para $1 \le m \le 6$, la división $m/7$ siempre comienza en algún punto de la cadena de restos y sus decimales serán 142857 reordenados cíclicamente.

$$m \cdot \frac{1}{7} = 0.\mathrm{reord}(142857)\ldots \;\Rightarrow\; m \cdot 142857 = \mathrm{reord}(142857).$$

La división $1/17$ también tiene esta propiedad, esta vez con todos los números del 1 al 16.

Calculando los decimales, se tiene que

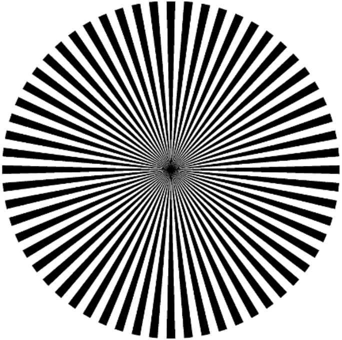
$$\boxed{\mathbf{0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7}}$$

también serviría para hacer el truco y de manera más espectacular. Pero... tendrás que conseguir que alguien tenga ganas de multiplicar este número por algún $1 \leq m \leq 16$.

Un resultado difícil dice que todos estos números mágicos se obtienen de los decimales de $1/p$ con p ciertos números primos.

El efecto Moiré

Imprimamos un montón de sectores muy finos de un círculo grande en una hoja transparente.



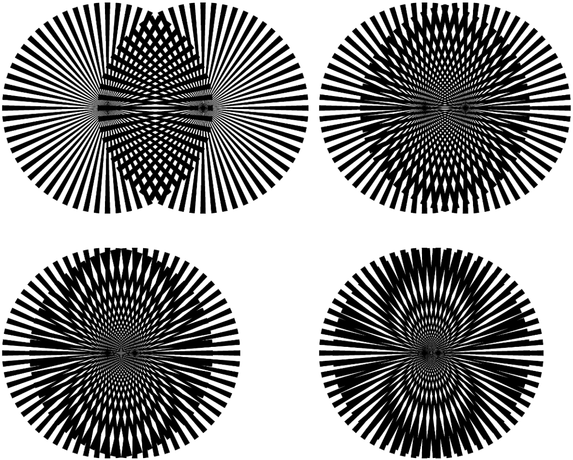
Ya en esta diapositiva reproducida en un ordenador o impresa, se ven unas curvas raras que **no aparecen en la realidad**.

En la televisión también a veces se ve que las rayas de una camisa muy tupida parecen moverse solas. Éste es un fenómeno de interferencia llamado **efecto Moiré**.

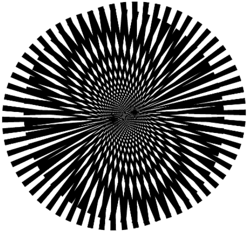
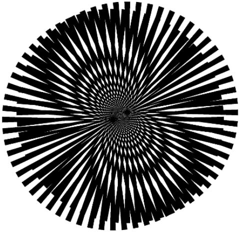
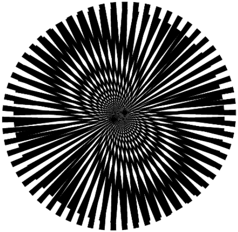
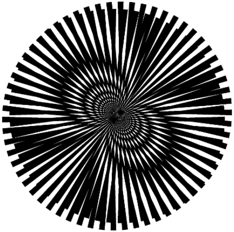
El nombre proviene de un tipo de tela de seda, llamada *moiré* en francés, que presenta reflejos en forma de "aguas".

En el caso anterior, la interferencia se produce con las líneas del monitor. Un efecto más espectacular, y fácil de reproducir en casa, se consigue superponiendo la imagen anterior en una hoja transparente consigo misma.

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se podrucen interferencias más nítidas.



Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes se producen curiosas sensaciones de movimiento.

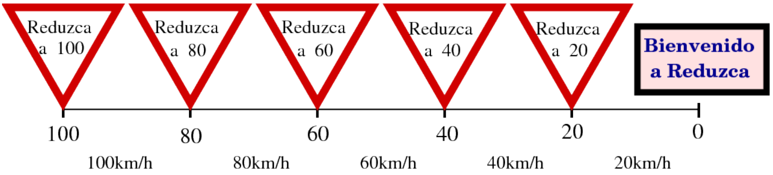





Los logaritmos tienen su gracia

Un chiste malo: Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa "Reduzca a 100", después otro que dice "Reduzca a 80" y así sucesivamente

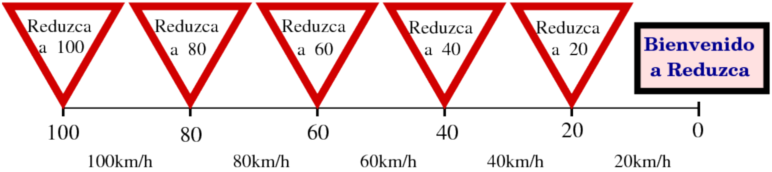
Los logaritmos tienen su gracia

<u>Un chiste malo</u>: Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa "Reduzca a 100", después otro que dice "Reduzca a 80" y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica **Bienvenido a Reduzca**.



Hay 5 tramos de 20km. El primero se recorre a 100km/h, el segundo a 80km/h, hasta el último que se recorre a 20km/h. Entonces se tarda:

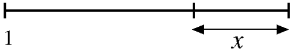
$$\Delta t = \frac{\Delta e}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20}{100} + \frac{20}{80} + \frac{20}{60} + \frac{20}{40} + \frac{20}{20} = \frac{137}{60} = 2\text{h } 17\text{m}.$$



Los logaritmos neperianos son muy importantes (se estudian desde 4º de la ESO) y, aunque parezca mentira, J. Neper los inventó en 1614 mediante una variante de este chiste.

En el caso de Neper, la distancia inicial era 1 y había infinitas señales, con lo cual el coche nunca llegaba.

$-\ln x =$ tiempo en llegar a distancia x



Portada de 1614 de la *Descripción de las leyes maravillosas de los logaritmos* de J. Neper 1550-1617.

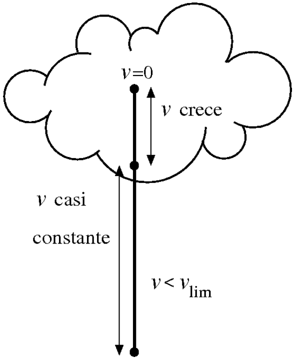
Los logaritmos permiten pasar multiplicaciones a sumas (que son más fáciles), las divisiones a restas y las raíces a divisiones. Éstas son algunas de las "leyes maravillosas" de Neper.

Reproducción de los dibujos originales:

Velocidad límite

Hay situaciones comunes en las que la velocidad se comporta como el espacio recorrido en el chiste: se incrementa cada vez menos y hay una *velocidad límite*.

¿A qué velocidad cae la lluvia?
¿Por qué los paracaidistas llevan gafas?



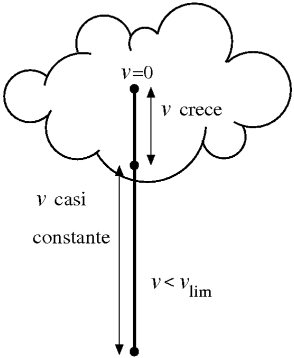
Velocidad límite

Hay situaciones comunes en las que la velocidad se comporta como el espacio recorrido en el chiste: se incrementa cada vez menos y hay una *velocidad límite*.

¿A qué velocidad cae la lluvia?
¿Por qué los paracaidistas llevan gafas?

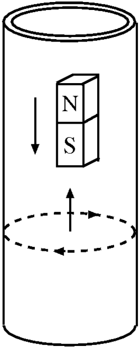
Dependiendo de las condiciones, se tiene:

- Gotas de lluvia gruesa $v_{\text{lim}} = 10\text{m/s}$
- Salto en paracaídas $v_{\text{lim}} = 200\text{km/h}$



Un poco de Física. . .

Un ejemplo menos conocido es el de un imán que cae por un tubo metálico que no sea de hierro ni acero (ni de otro material al que se pegue el imán).

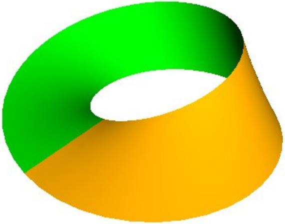


Un campo magnético que varía mueve los electrones del metal que, a su vez, crean otro campo magnético. Según la *ley de Lenz*, estos campos son opuestos.

Rápidamente la velocidad del imán se acerca a la velocidad límite, que es pequeña si el imán es potente.

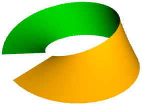
Möbius y su banda

A. Möbius

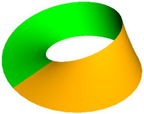


su banda

$\longrightarrow$



$\longrightarrow$



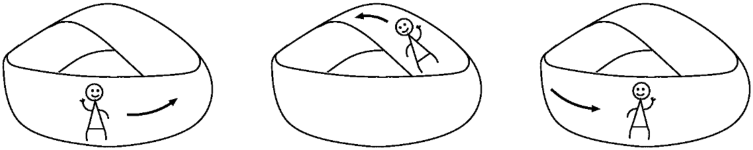
Una cara es suficiente

El símbolo internacional del reciclaje es una **banda de Möbius** ¿quizá porque se aprovechan las dos caras?

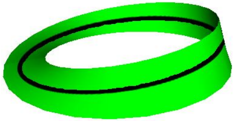
Las dos caras de una cinta normal (o de un cilindro) se transforman en una en la banda de Möbius. Si caminamos por ella, la recorremos por entero, a diferencia de lo que ocurre en un cilindro, en el que siempre se pasa por la misma cara.

Una cara es suficiente

El hecho de que sólo haya una cara tiene algunas consecuencias sorprendentes. Por ejmplo, un habitante (bidimensional) que viviera dentro de una banda de Möbius, si se cansara de ser diestro sin más que dar un paseo por su mundo.



La banda de Möbius tiene curiosas propiedades cuando usamos las tijeras con ella.



Si la cortamos por su ecuador, no se separa en dos trozos sino que da lugar a una cinta más larga y más retorcida.

Otro curioso fenómeno se produce al pegar en perpendicular dos bandas de Möbius de sentidos opuestos...

Cortando ambas por su ecuador se obtienen ¡¡dos corazones entrelazados!!.

Gracias

Presentación y código fuente disponibles en

`http://www.uam.es/fernando.chamizo`