La sumación de Poisson y parientes cercanos

Fernando Chamizo Lorente
(UAM-ICMAT)

Universitat Autònoma de Barcelona

14 de diciembre de 2016

> *Poisson summation for number theory is what a car is for people in modern communities — it transports things to other places and it takes you back home when applied next time — one cannot live without it.*

H. Iwaniec, E. Kowalski

Analytic Number Theory

Idea intuitiva

La fórmula que resume la sumación de Poisson es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}$$

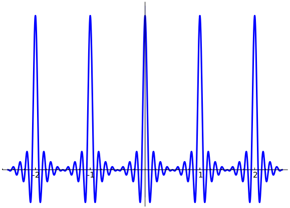
Idea intuitiva

La fórmula que resume la sumación de Poisson es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi inx} = \frac{e^{-2\pi i(N+1)x} - e^{2\pi iNx}}{e^{-2\pi ix} - 1}$$

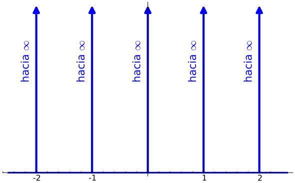
$$= \frac{\sin\left(\pi(2N+1)x\right)}{\sin(\pi x)} =$$



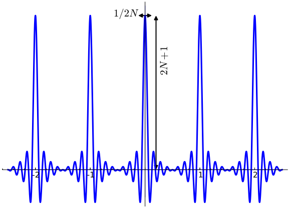
Idea intuitiva

La fórmula que resume la sumación de Poisson es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx}$$



$$= \lim_{N\to\infty}$$

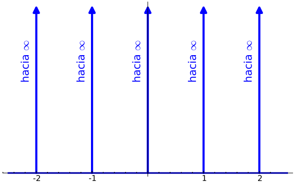


Y si integramos $\boxed{D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi inx}}$ contra una función que decaiga bien, el resultado se aproxima por la suma de los valores de f en los enteros.

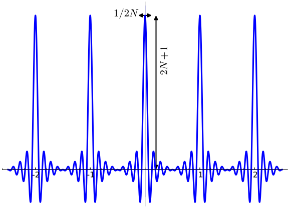
Idea intuitiva

La fórmula que resume la sumación de Poisson es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}$$



$$= \lim_{N\to\infty}$$



Fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$$

¿Y para un matemático formal?

Se define una función 1-periódica: $\boxed{F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)}$

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(t) e^{-2\pi int} dt \; e^{2\pi inx}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi int} dt \; e^{2\pi inx}$$

y basta tomar $x = 0$.

Fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi x} \, dx$$

Formulitas

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\frac{e^{\pi\alpha}+e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{C},\ \text{con } i\alpha \notin \mathbb{Z}}$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha}$$

$\boxed{\Re(\alpha) > 0}$

$$\boxed{f(x)=e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\frac{e^{\pi\alpha}+e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}=\frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$$

$$\boxed{\alpha\in\mathbb{C},\ \text{con}\ i\alpha\notin\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f(x)=e^{-2\pi\alpha x^2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\alpha n^2}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2/2\alpha}$$

$$\boxed{\Re(\alpha)>0}$$

$$\boxed{\Big(\frac{1}{2}\sum_{n=-15}^{15}e^{-n^2/4}\Big)^2=3{,}141592653589793\ldots\stackrel{?}{=}\ \pi}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\longrightarrow \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \qquad \boxed{\alpha \in \mathbb{C}, \text{ con } i\alpha \notin \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha} \qquad \boxed{\Re(\alpha) > 0}$$

$$\boxed{\Big(\frac{1}{2} \sum_{n=-15}^{15} e^{-n^2/4}\Big)^2 = 3{,}1415926535897932840224\dots}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} \qquad \boxed{\alpha \in \mathbb{C}, \text{ con } i\alpha \notin \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha} \qquad \boxed{\Re(\alpha) > 0}$$

$$\boxed{f(x) = |x|^{-s}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{-s} = \underbrace{2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)}_{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-s} \cos(2\pi x)\, dx, \quad 0 < s < 1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s-1}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}}$$

$$\frac{e^{\pi\alpha}+e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2} \qquad \boxed{\alpha\in\mathbb{C},\text{ con } i\alpha\notin\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha} \qquad \boxed{\Re(\alpha)>0}$$

$$\boxed{f(x) = |x|^{-s}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^{-s} = 2(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^{s-1}$$

La función $\zeta(s)$ extiende analíticamente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$,

$$\boxed{\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)}$$

Un tema candente. . .

El método de las imágenes

El método se utiliza para construir soluciones en diversos problemas de la física matemática.

C Ecuación del calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{C}} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}}$$

Cuando $f(x) = \delta(x)$, la función

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$$

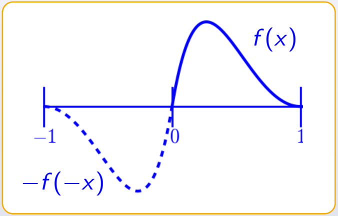
resuelve $\boxed{\mathrm{C}}$, y empleando $f(x) = \int \delta(x-y) f(y)\, dy$

Solución general: $$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y)\, dy}$$

D
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$¿\ u(x,t) = \int_0^1 G(x-y,t) f(y)\, dy\ ?$$

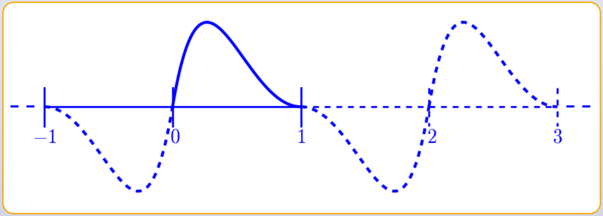
D
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$



Situando fuentes de frío opuestas a las fuentes de calor detrás de $x = 0$,

$$u(x,t) = \int_{-1}^{1} G_D(x-y,t) f^*(y)\, dy$$

con f^* la extensión impar de f a $[-1,1]$



impar en $x = 0$
y en $x = 1$

D
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-1}^{1} G_D(x-y,t) f^*(y)\, dy}$$

con f^* la extensión impar de f a $[-1,1]$ y

$$G_D(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2n)^2/4t}$$ ✓ t pequeño

Fórmula de sumación de Poisson
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} e^{\pi i n x}$$ ✓ t grande

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} e^{\pi i n x}, \qquad c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^*(y) e^{-\pi i n y}\, dy}$$

La puerta a más dimensiones

Subir de dimensión es fácil.

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{n}) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$$

Una vez que hemos subido, también la podemos bajar.

Subir de dimensión es fácil.

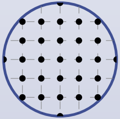
$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{n}) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x}$$

Una vez que hemos subido, también la podemos bajar.

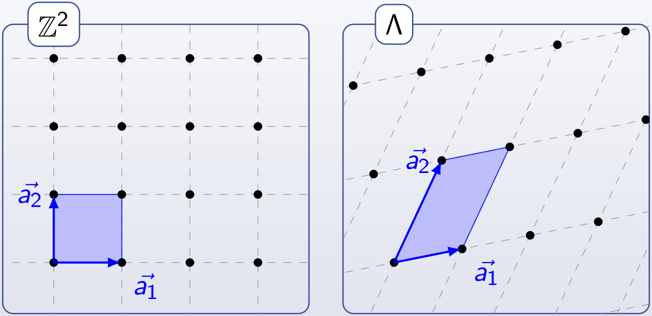
Si $d = 2$ y f es radial, entonces $\boxed{f(\vec{n}) = g(n_1^2 + n_2^2)}$ y

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} r(n) g(n) = \pi \int_0^{\infty} g(x)\, dx + \pi \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \int_0^{\infty} g(x) J_0(2\pi\sqrt{nx})\, dx}$$

que es fundamental para estudiar el problema del círculo de Gauss.



Sumación de Poisson en retículos

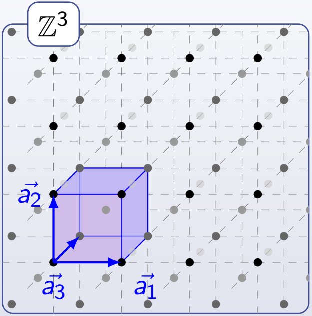


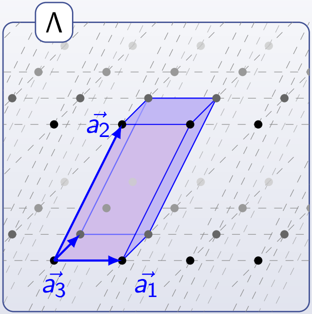
Retículo en $\mathbb{R}^d$: $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$, con A matriz cuadrada no singular

Retículo dual : $\Lambda^* = \left(A^{-1}\right)^t\mathbb{Z}^d$

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1}\sum_{\vec{n}\in\Lambda^*}\widehat{f}(\vec{n}) \qquad \text{donde} \quad |\Lambda| := \det(A)$$

Sumación de Poisson en retículos





Retículo en $\mathbb{R}^d$: $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$, con A matriz cuadrada no singular

Retículo dual : $\Lambda^* = (A^{-1})^t\mathbb{Z}^d$

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}) \qquad \text{donde} \quad |\Lambda| := \det(A)$$

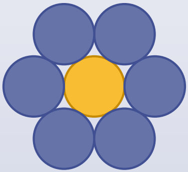
Muac

Kissing number $\kappa(d)$

El problema

Para cada dimensión d, calcular el máximo número de esferas que pueden tocar o "besar" simultáneamente a otra (todas del mismo tamaño).

$\kappa(1) = 2$



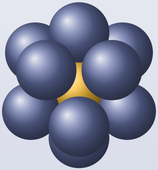
$\kappa(2) = 6$

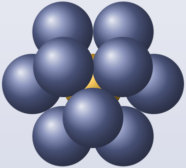
Kissing number $\kappa(d)$

El problema

Para cada dimensión d, calcular el máximo número de esferas que pueden tocar o "besar" simultáneamente a otra (todas del mismo tamaño).

Config. icosaedro





Config. de Kepler

$$\boxed{\kappa(3) = 12}$$

Lattice kissing number $\ell(d)$

El mismo problema pero suponiendo que los centros de las esferas están en un retículo.

d	$\kappa(d)$
1	2
2	6
3	12
4	24
8	240
24	196560

$$¿\kappa(d) = \ell(d)?$$

Los seis valores conocidos de $\kappa(d)$ coinciden con $\ell(d)$ pero se sabe indirectamente que $\kappa(9) \neq \ell(9)$.

Por otro lado, está claro que $\kappa(d) \geq \ell(d)$.

Estos problemas están relacionados con el empaquetamiento de esferas.

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n})$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}}$$

$$\boxed{\alpha^{d/2} \sum_{\vec{n}\in\Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}} = |\Lambda|^{-1} 2^{-d/2} \sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} e^{-\pi\|\vec{n}\|^2/2\alpha}$$

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2}\Big(1 + \ell e^{-2\pi\alpha} + \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}\Big)$$

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1}\sum_{\vec{n}\in\Lambda^*}\widehat{f}(\vec{n})$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}}$$

$$\boxed{\alpha^{d/2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}} = |\Lambda|^{-1}2^{-d/2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} e^{-\pi\|\vec{n}\|^2/2\alpha}$$

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2}\Big(1+\ell e^{-2\pi\alpha}+\sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}\Big)$$

Si $\alpha > d/4\pi$,

$$0 \le F'(\alpha) = \frac{d}{2}\alpha^{d/2-1} + \alpha^{d/2-1}\ell e^{-2\pi\alpha}\Big(\frac{d}{2}-2\pi\alpha\Big) + \begin{matrix}\text{cosas}\\ \text{negativas}\end{matrix}$$

Tomando $\alpha = (d+2)/4\pi$, $\quad \boxed{\ell(d) \le \frac{d}{2}e^{d/2+1}}$

Bienvenido al mundo modular

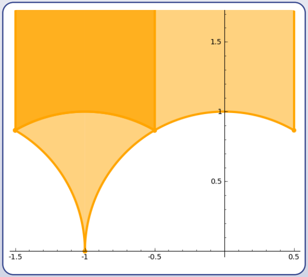
Pregunta rápida: ¿Cuántas funciones F hay que sean holomorfas en $\mathbb{C}$ con dos periodos, digamos

$$F(z) = F(z+1) \quad \text{y} \quad F(z) = F(z+i),$$

una vez que se ha especificado $F(0)$?

Respuesta (igual de rápida): Solo una, la función constante $F(z) = F(0)$.

Cuando uno considera funciones holomorfas en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \ : \ \Im(z) > 0\}$ e impone condiciones relacionadas con ciertos grupos hiperbólicos, la teoría adquiere una riqueza y profundidad increíble.



Formas modulares

Sólo hay una función holomorfa en $\mathbb{H}$ que cumple

$$F(z) = F(z+1), \qquad F(z) = \frac{-1}{4z^2} F\Big(-\frac{1}{4z}\Big),$$

una vez que especificamos el valor de $F(i\infty) := \lim_{\Im(z)\to+\infty} F(z)$, supuesto finito al igual que $\lim_{\Im(z)\to 0^+} \Im(z)^N F(z)$.

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha}$$

$\alpha = -iz$

$$\boxed{F(z) = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}\Big)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z}, \quad F(i\infty) = 1}$$

Formas modulares

Sólo hay una función holomorfa en $\mathbb{H}$ que cumple

$$F(z) = F(z+1), \qquad F(z) = \frac{-1}{4z^2} F\Big(-\frac{1}{4z}\Big),$$

una vez que especificamos el valor de $F(i\infty) := \lim_{\Im(z)\to+\infty} F(z)$, supuesto finito al igual que $\lim_{\Im(z)\to 0^+} \Im(z)^N F(z)$.

$$\boxed{f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}} \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha}$$

$\alpha = -iz$

$$\boxed{F(z) = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}\Big)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z}, \qquad F(i\infty) = 1}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m} \sum_{n}_{(m,n)\neq(0,0)} \Big(\frac{4}{(m+4nz)^2} - \frac{1}{(m+nz)^2}\Big)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r_4(n)e^{2\pi inz} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m}\sum_{\substack{n\\(m,n)\neq(0,0)}}\Big(\frac{4}{(m+4nz)^2}-\frac{1}{(m+nz)^2}\Big)}$$

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+w)^2} = -4\pi^2\sum_{m=1}^{\infty} me^{2\pi imw}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r_4(n)e^{2\pi inz} = 1+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(me^{2\pi imnz}-4me^{2\pi i4mnz}\big)}$$

Comparando los coeficientes de $e^{2\pi inz}$:

$$\boxed{r_4(n) = 8\sum_{4\nmid d,\ d\mid n} d}$$

$$r_4(2016) = 8(1+2+3+6+7+9+14+18+21+42+63+126) = 2496$$

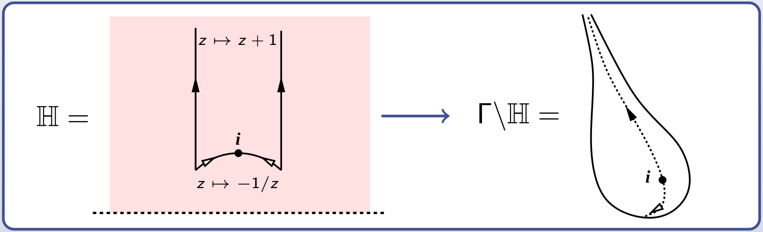
La apoteosis de Poisson:
Análisis, aritmética y geometría

Formas modulares no holomorfas

Geométricamente:

El semiplano $\mathbb{H}$ dotado de la métrica $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ es un modelo de geometría hiperbólica.

Cuando un grupo fuchsiano Γ actúa en $\mathbb{H}$, el cociente $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ adquiere estructura de variedad riemanniana.



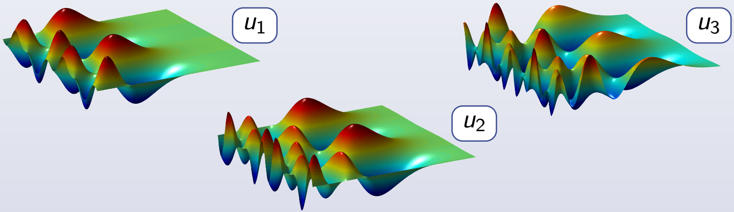
Las formas modulares no holomorfas son las funciones de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

Operador de Laplace-Beltrami: $-\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$

Formas de Maass (normalizadas): $u_j(z)$

son las autofunciones del laplaciano hiperbólico

$$-\Delta u_j = \lambda_j u_j \quad \text{con} \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$$



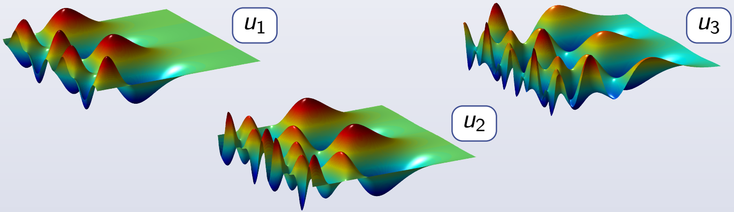
$$\boxed{\text{¿Análogo de } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}\text{?}}$$

Operador de Laplace-Beltrami: $-\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$

Formas de Maass (normalizadas): $u_j(z)$

son las autofunciones del laplaciano hiperbólico

$$-\Delta u_j = \lambda_j u_j \quad \text{con} \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$$



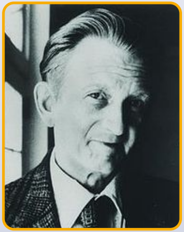
$$\boxed{\sum_{\gamma\in\Gamma} D(z,\gamma w) = \sum_j u_j(z)\overline{u_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(z,1/2+ir)\overline{E(w,1/2+ir)}\,dr}$$

Fórmula de la pretraza

Si $K(z,w)$ sólo depende de la distancia de z a w,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} K(z,\gamma w) = \sum_j h(\lambda_j) u_j(z)\overline{u_j(w)} + \dots$$

Integrando en $z=w$ se llega a la traza pero ... hay que truncar y encontrar un trozo en la suma en Γ que cancele el infinito en el límite.



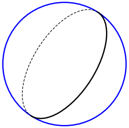
A. Selberg

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f\big(\sqrt{\lambda_n - 1/4}\big) = \frac{1}{2}\sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_n \widehat{f}(k\ell_n)}{\sinh(k\ell_n/2)} + \dots}$$

donde ℓ_n son las longitudes de las geodésicas cerradas.

(Chazarain, Colin de Verdière, Duistermaat, Guillemin)

Si λ_n son los autovalores de $-\Delta$ de una variedad riemanniana compacta entonces $\sum e^{ix\sqrt{\lambda_n}}$ es algo con singularidades en $x = k\ell_n$ con $k \in \mathbb{Z}$.

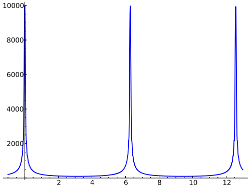


Autovalores

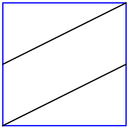
$$\boxed{k(k+1)}$$

multiplicidad $2k+1$

geodésicas : longitud 2π



$\lambda_n < 10^4$

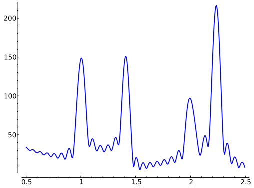


Autovalores

$$\boxed{4\pi^2 k}$$

multiplicidad $r(k)$

geodésicas : vectores enteros



Colgaré un artículo con el contenido de esta charla un poco extendido y con mejores chistes en:

https://www.uam.es/fernando.chamizo

(no hace falta ni suscribirse ni pinchar ningún *me gusta*)

Bonus track

Siméon Denis Poisson (1781–1840)

Fue un investigador y profesor infatigable que vivió los turbulentos años de la restauración monárquica tras la revolución francesa.

En *Sur les intégrales définies et sur la sommation des séries*, publicada en 1821 en el Journal de l'École Royale Polytechnique, aparece:

$$\frac{1}{2}F(0)+\Sigma F(2nl)=\frac{1}{2}A_0+\Sigma A_n,$$

$$\int_0^\infty \cos\frac{n\pi z}{l}\, Fz\, \frac{dz}{l}=A_n.$$

$$\frac{1}{2}F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(2ln)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n, \quad \text{con} \quad A_n=\frac{1}{l}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right)F(z)\,dz$$

Tomando $l=1/2$ y $f(x)=F(|x|)$,

$$\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)}$$

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\cos(2\pi nx)f(x)\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\cos(2\pi nx)f(x)\,dx$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)}$$

Con esto queda probado la formula de sumación para funciones pares.

¿Y para las impares? ¿Y para el resto?

$$\frac{1}{2}F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(2ln)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n, \quad \text{con} \quad A_n=\frac{1}{l}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right)F(z)\,dz$$

Tomando $l=1/2$ y $f(x)=F(|x|)$,

$$\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)}$$

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\cos(2\pi nx)f(x)\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\cos(2\pi nx)f(x)\,dx$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)}$$

Con esto queda probado la formula de sumación para funciones pares.

¿Y para las impares? ✓ ¿Y para el resto? ✓

$0=0$ $f=f^{+}+f^{-}$