Cuando tu ordenador te engaña

Fernando Chamizo

Actualización en Análisis Matemático

26 de abril de 2012

http://www.uam.es/fernando.chamizo

Índice

1. Introducción
2. Gráficas caprichosas
3. Racionalización irracional
4. El "chiste" de reduzca
5. Circunferencias no circulares
6. El ϵ-máquina y sumas no reordenables
7. Más cuentas, menos precisión
8. ¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?
9. Equilibrio inestable
10. ¿Remedando a Arquímedes?

¿Análisis con el ordenador

Análisis

Límites, incrementos continuos, cantidades que se hacen infinitamente grandes o infinitamente pequeñas. . .

Ordenador

Cantidades discretas, capacidad de almacenamiento limitada, funcionamiento internamente digital. . .

No obstante, muchos de los modelos computacionales empleados en ingeniería están basados en el análisis.

Gráficas caprichosas

La derivada "de verdad"

Es la velocidad instantánea o la pendiente de la recta tangente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La derivada "aproximada"

Es la velocidad media en tiempos pequeños o la pendiente de una recta secante en puntos muy próximos:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

con $h = \Delta x$ pequeño.

Gráficas caprichosas

Cuanto menor sea h, mejor es la aproximación.

Ejemplo: Con $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

$$f'\Big(\frac{1}{6}\Big) = \pi\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}720699\dots, \qquad \frac{f\left(\frac{1}{6}+10^{-4}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)}{10^{-4}} = 2{,}720452\dots$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{6}+10^{-5}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)}{10^{-5}} = 2{,}720674\dots$$

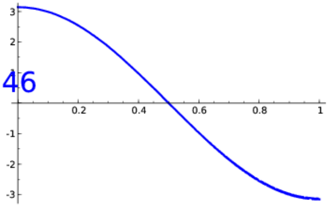
Aparentemente, con $h = 10^{-n}$ conseguimos una aproximación del orden de n cifras correctas.

Gráficas caprichosas

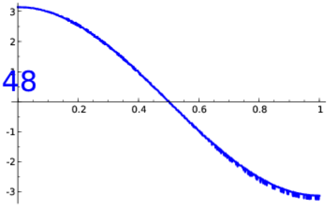
Pero si tomamos h muy pequeño, alrededor de 10^{-15}, empiezan a suceder cosas raras.

Derivada aproximada de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ **en** $[0, 1]$**:**

Gráficas con Sage



$h = 2^{-46} = 1{,}42 \cdot 10^{-14}$

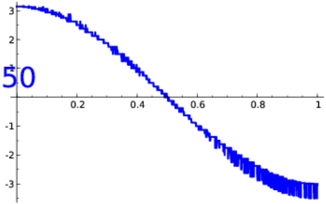


$h = 2^{-48} = 3{,}55 \cdot 10^{-15}$

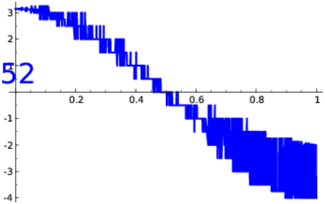
Gráficas caprichosas

Derivada aproximada de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en $[0, 1]$:

Gráficas con Sage



$h = 2^{-50} = 8{,}88 \cdot 10^{-16}$

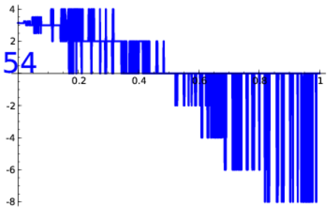


$h = 2^{-52} = 2{,}22 \cdot 10^{-16}$

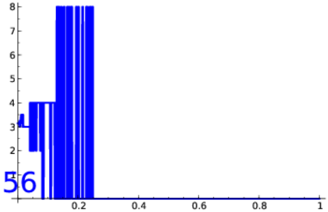
Gráficas caprichosas

Derivada aproximada de $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ **en** $[0, 1]$**:**

Gráficas con Sage



$h = 2^{-54} = 5{,}55 \cdot 10^{-17}$



$h = 2^{-56} = 1{,}38 \cdot 10^{-17}$

Con otras funciones, ocurre algo similar. Incluso el tamaño de h en que las cosas empiezan a ir mal parece ser universal.

Gráficas caprichosas

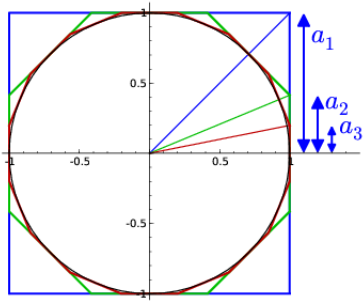
La pregunta del alumno listillo (I)

¿Por qué las gráficas de la derivada aproximada se vuelven locas?

Racionalización irracional

Calcular π

Un algoritmo para aproximar π que proviene de Arquímedes, consiste en aproximar la circunferencia unidad por polígonos.



Cuadrado:

$a_1 = 1$

$p_1 = 8$

Octógono:

$a_2 = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

$p_1 = 16\sqrt{2} - 16 = 6{,}62\ldots$

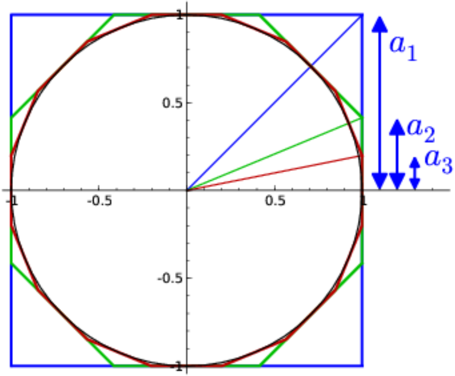
Long. circ. $= 2\pi = 6{,}28\ldots$

Racionalización irracional

a_n = mitad del lado del polígono de 2^{n+1} lados

$$\boxed{2^{n+1}a_n \to \pi}$$

$$a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$



Sólo tendrá sentido como algoritmo para aproximar π si tenemos una fórmula para a_n que no dependa de π.

Racionalización irracional

Una fórmula para a_n

Escribamos $\alpha = \pi/2^n$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{\frac{1}{\cos\alpha}-1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}-1}{\tan\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}
$$

Esta fórmula permite calcular a_n de manera recurrente a partir de $a_1 = 1$.

Racionalización irracional

¿Dos? fórmulas

$$a_n = \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}} \qquad \Bigg| \qquad b_n = \frac{b_{n-1}}{\sqrt{1 + b_{n-1}^2} + 1}$$

Ambas fórmulas son idénticas escribiendo $a_n = b_n$ y racionalizando. Por tanto partiendo de $a_1 = b_1 = 1$ dan los mismos resultados.

Racionalización irracional

Haciendo un pequeño programa con Sage vemos que en el quinto término aparece una pequeña divergencia prácticamente inapreciable.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
1	4.00000000000000	4.00000000000000
2	3.31370849898476	3.31370849898476
3	3.18259787807453	3.18259787807453
4	3.15172490742926	3.15172490742926
5	3.14411838524587	3.14411838524590
6	3.14222362994234	3.14222362994246
7	3.14175036916970	3.14175036916897

Racionalización irracional

El problema es cómo va evolucionando.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
18	3.14159252378847	3.14159265362739
19	3.14160058362634	3.14159265359919
20	3.14159252378847	3.14159265359214
21	3.14144515887080	3.14159265359038
22	3.14097079560249	3.14159265358994
23	3.13398329388536	3.14159265358983
24	3.11105678802532	3.14159265358980
25	3.05362474788830	3.14159265358980
26	2.61983729517922	3.14159265358979

Racionalización irracional

Ni siquiera podemos continuar mucho más allá. Con Sage (con otro software o una calculadora pasaría algo similar) el ordenador se niega a calcular a_{29} alegando divisiones por cero.

Sin embargo b_n funciona bien y sigue dando π con las 14 cifras decimales correctas que muestra, sin que se vea ningún fallo según avanza n.

¿Por qué el primer método es malo y el segundo es bueno?

Racionalización irracional

La pregunta del alumno listillo (II)

¿Cómo es que ordenador da resultados bien distintos si las fórmulas son iguales?

El “chiste” de reduzca

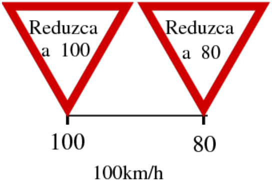
El “chiste”

Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”

El “chiste” de reduzca

El “chiste”

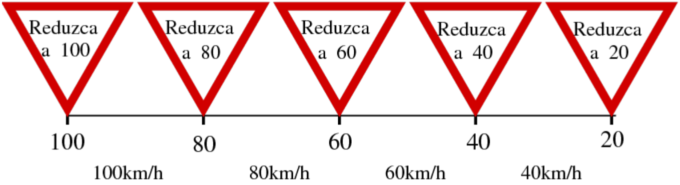
Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80”



El “chiste” de reduzca

El “chiste”

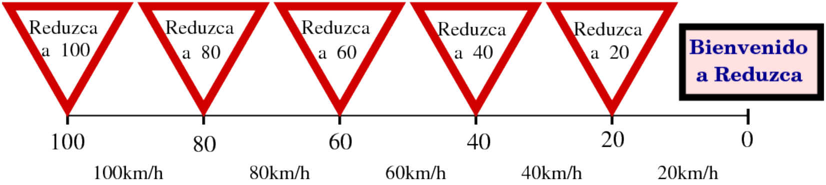
Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente



El "chiste" de reduzca

El "chiste"

Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa "Reduzca a 100", después otro que dice "Reduzca a 80" y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica **Bienvenido a Reduzca**.

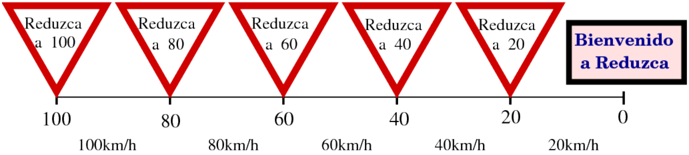


El "chiste" de reduzca

¿Cuánto tarda en llegar a Reduzca?

Hay 5 tramos de 20km. El primero se recorre a 100km/h, el segundo a 80km/h, hasta el último que se recorre a 20km/h.

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{20}{100} + \frac{20}{80} + \frac{20}{60} + \frac{20}{40} + \frac{20}{20} = \frac{137}{60} = 2\text{h } 17\text{m}.$$



El "chiste" de reduzca

Poniendo más señales, se tardará más en llegar

¿Es posible tardar más de dos días en vez de más de dos horas?

Con N señales hay N tramos de $100/N$km. El primero se recorre a 100km/h, el segundo a $(100-100/N)$km/h, el tercero a $(100-2\cdot 100/N)$km/h; hasta el último que se recorre a $\big(100-(N-1)100/N\big)$km/h, esto es, $100/N$km/h.

$$\frac{100/N}{100}+\frac{100/N}{100-100/N}+\frac{100/N}{100-200/N}+\dots\frac{100/N}{100/N}>48.$$

48h = días

El "chiste" de reduzca

¿Es posible tardar más de dos días?

Para N del orden de decenas de miles, el incremento se hace cada vez menor. ¿Quizá el tiempo converja a algún valor que no alcanza a 48?

N	Suma	Δ
100000	12.0901	......
200000	12.7832	0.6931
300000	13.1887	0.4054
400000	13.4764	0.2876
500000	13.6995	0.2231

N	Suma	Δ
600000	13.8819	0.1823
700000	14.0360	0.1541
800000	14.1695	0.1335
900000	14.2873	0.1177
1000000	14.3927	0.1053

El “chiste” de reduzca

La pregunta del alumno listillo (III)

¿Está acotado el tiempo de llegada?

Circunferencias no circulares

Ecuaciones de la mecánica	$\leftrightarrow$	Relaciones entre funciones (posiciones y momentos) y sus derivadas

El ejemplo más famoso es el movimiento de los planetas (Newton)

Problema práctico:

Muchas veces estas ecuaciones no tienen soluciones explícitas.
¿Cómo se resuelven numéricamente con el ordenador?

Circunferencias no circulares

Un modelo sencillo

Consideramos el movimiento de una partícula $\big(x(t), y(t)\big)$ regido por:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \text{partiendo de} \qquad \big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$$

La solución es $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$.

Circunferencias no circulares

Un método sencillo (el *método de Euler*)

Usamos $x'(t) \approx \dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$, $y'(t) \approx \dfrac{y(t+h)-y(t)}{h}$.
Nuestro problema se convierte en las ecuaciones aproximadas

$$\begin{cases} x(t+h) = x(t) - hy(t) \\ y(t+h) = y(t) + hx(t) \end{cases}$$

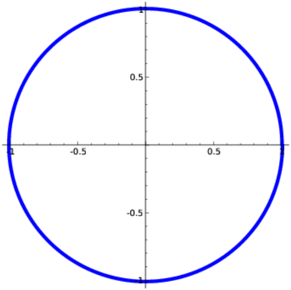
A partir de $\big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$ se aproxima $\big(x(h), y(h)\big)$ y después $\big(x(2h), y(2h)\big)$ y así sucesivamente. Uniendo los puntos, se tiene una aproximación de la solución.

$h \to 0 \Rightarrow$ solución exacta

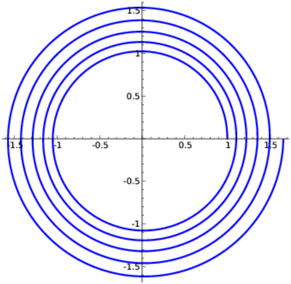
Circunferencias no circulares

Análisis del error

Taylor $\rightarrow$ error de orden h^2 en cada paso
$[0, T]$ requiere T/h pasos $\rightarrow$ error total de orden hT.



$h = 0{,}001,\ t \in [0, 10\pi]$

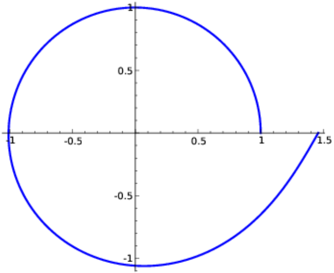


$h = 1/31,\ t \in [0, 10\pi]$

Circunferencias no circulares

Otro problema con solución $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$

$$\begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2}x(x^2+y^2-1) \\ y' = x + \frac{1}{2}y(x^2+y^2-1) \end{cases} \quad \text{con} \quad \big(x(0), y(0)\big) = (1,0)$$



$h = 0{,}001,\ t \in [0, 2\pi]$

$h = 0{,}001,\ t \in [0, 2\pi]$

$1/2 \leftrightarrow 0{,}5599$

La pregunta del alumno listillo (IV)

¿Por qué el método funciona en unos problemas y no en otros?

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

ϵ-máquina

Es el máximo <u>error relativo</u> que el ordenador puede detectar.

En doble precisión en C/C++ es $2^{-53} \approx 10^{-16}$.

¿Cómo se almacena internamente $-1{,}3521606 \cdot 10^{30} = -\frac{16}{15}2^{100}$**?**

Signo: $- \to 1$
Exponente: $100 \to 1100100$ en binario
Mantisa: $16/15 \to 1{,}010101\ldots$ en binario

$\underbrace{\boxed{1}}_{\text{1 bit: signo}} \quad \underbrace{\boxed{0}\boxed{0}\ \ldots\ \ldots\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}}_{\text{11 bits: exponente}} \quad \underbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\ \ldots\ \ldots\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}}_{\text{52 bits: mantisa}}$

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

$\epsilon = \epsilon$-máquina $\qquad \boxed{1 + \epsilon = 1}$

Las sumas (y productos) computacionales no se pueden reordenar

$2.01+0.00003+0.00004+0.00004 \neq 0.00003+0.00004+0.00004+2.01$

Con $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} & 2.01 \\ + & 0.00003 \\ = & 2.01 \\ + & 0.00004 \\ = & 2.01 \\ + & 0.00004 \\ = & \boxed{2.01} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} & 0.00003 \\ + & 0.00004 \\ = & 0.00007 \\ + & 0.00004 \\ = & 0.00011 \\ + & 2.01 \\ = & \boxed{2.0101} \end{array}}$$

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

Un ejemplo

Queremos aproximar π^4 usando 100000 términos en

$$\pi^4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{90}{m^4}.$$

Suma directa:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{100000^4} \;\rightarrow\; \text{error} = 1.93 \cdot 10^{-11}$$

Suma inversa:

$$\frac{1}{100000^4} + \frac{1}{99999^4} + \cdots + \frac{1}{1^4} \;\rightarrow\; \text{error} = 4.26 \cdot 10^{-14}$$

Con el orden inverso al habitual, el error es 400 veces menor.

El ϵ-máquina y sumas no reordenables

Ideas $\epsilon = 2^{-53} \approx 10^{-16}$

Sumar un número que tiene la coma 16 lugares más a la izquierda no tiene ningún efecto

$$x, \qquad y = \epsilon x, \qquad z = x(1+\epsilon) \;\Rightarrow\; x + y = x, \quad z - x = 0$$

Con el ordenador

- Es mejor sumar números de tamaños comparables
- Evitar restar números muy próximos (en tamaño relativo)

No se pueden hallar con seguridad incrementos de una cantidad que corresponden a un error relativo ϵ. En particular el cociente incremental deja de aproximar a la derivada a esa escala.

Más cuentas, menos precisión

Recordemos que teníamos dos algoritmos idénticos:

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$$

$$b_1 = 1 \qquad\qquad b_n = \frac{b_{n-1}}{\sqrt{1+b_{n-1}^2}+1}$$

Según la teoría, $2^{n+1}a_n$ y $2^{n+1}b_n$ tienden a π, pero numéricamente sólo ocurría con el segundo.

n	$2^{n+1}a_n$	$2^{n+1}b_n$
22	3.14097079560249	3.14159265358994
23	3.13398329388536	3.14159265358983
24	3.11105678802532	3.14159265358980
25	3.05362474788830	3.14159265358980
26	2.61983729517922	3.14159265358979

Más cuentas, menos precisión

ϵ=ϵ-máquina $\Rightarrow (1+\epsilon)/\epsilon - 1/\epsilon = 0$ para el ordenador

$(1+\delta)/\delta - 1/\delta =$ indeterminado si δ es comparable a ϵ

Por ejemplo, $\delta \approx 2\epsilon \Rightarrow 1+\delta$ *y* $1+\delta \pm \delta/2$ *indistinguibles para el ordenador* $\Rightarrow$ *podría tenerse* $(1+\delta)/\delta - 1/\delta = 3/2$ *ó* $1/2$

$(1+\delta)/\delta + 1/\delta = 2/\delta$ si δ es comparable a ϵ

El error relativo es comparable a $\epsilon \Rightarrow$ inapreciable

Más cuentas, menos precisión

Primer algoritmo

$$\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1 \approx (1+\delta)-\delta \text{ con } \delta = a_{n-1}^2/2$$

Si δ se acerca a ϵ hay problemas

n	$2^{n+1}a_n$	a_{n-1}	$a_{n-1}^2/2$
22	3.1409707956	7.4897889110e-7	2.8048468965e-13
23	3.1339832938	3.7443289704e-7	7.0099997194e-14
24	3.1110567880	1.8679996096e-7	1.7447112708e-14
25	3.0536247478	9.2716717363e-8	4.2981948392e-15
26	2.6198372951	4.5502554593e-8	1.0352412372e-15

Segundo algoritmo

No hay problema al sumar números comparables

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

J. Neper 1550-1617
Descripción de las leyes maravillosas de los logaritmos (1614)


MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Amplißimi, Facillimi, &
expeditißimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

6. Def. Logarithmus ergo cujusque sinus, est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea, dum sinus totius, linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio æquiveloce.

Por tanto, el Logaritmo de cualquier seno es el número que con aproximación define la línea que se *incrementa igualmente* al mismo tiempo que la línea para el *seno completo decrece proporcionalmente* en dicho seno, siendo ambos movimientos síncronos y con la misma velocidad inicial.

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

¿Qué significa esto?

Neper definió el logaritmo neperiano considerando el chiste de reduzca con infinitas señales, una en cada punto. Si la distancia inicial a Reduzca es 1 entonces el logaritmo neperiano de la distancia del coche a Reduzca es en valor absoluto igual al tiempo.

$$\ln x = -\text{tiempo que tarda el coche de 1 a } x$$

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Notación original de Neper

- Tablas para con 7 cifras $\to$ distancia inicial $= 10^7$ (*seno completo*)
- Tablas astronómicas para navegación $\to$ logaritmos de razones trigonométricas
- Números positivos $\to$ cambio de signo

$\ln_{\text{orig}} x =$ logaritmo neperiano de Neper
$\ln_{\text{act}} x =$ logaritmo neperiano actual

$$\ln_{\text{orig}} x = -10^7 \ln_{\text{act}} \frac{x}{10^7}$$

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Notación original de Neper

- *incrementarse igualmente* = paso uniforme del tiempo, representado en una recta con divisiones equidistribuidas.
- *decrecer proporcionalmente* = seguir la trayectoria del coche, representado con divisiones que se van juntando por la disminución de la velocidad.

Dibujo original de Neper:

Posiciones al cronometrar un coche normal y el coche de Reduzca

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

¿Cuántas señales hay que poner para tardar más de dos días?

$N =$ número de señales, $\qquad T =$ tiempo empleado en llegar

1. Más señales $\Rightarrow$ más tiempo
2. Neper $\Rightarrow$ con infinitas señales se llega a $1/N$ (en cientos de kilómetros) en $-\ln(1/N)$ horas
3. El último tramo se recorre en una hora

$$T = 1 + T_u < 1 + \ln N \qquad \Longrightarrow \qquad N > e^{T-1}.$$

Si $T > 48$ entonces $N > 2{,}5 \cdot 10^{20}$ un número de operaciones inasequible para un ordenador.

¿Cómo se inventaron los logaritmos neperianos?

Una cota superior para N

$N =$ número de señales, $T =$ tiempo empleado en llegar
Simplificando la fórmula original

$$T = \frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}.$$

Comparando sumas (superiores) con integrales

$$T > \int_1^{N+1} x^{-1} dx = \ln(N+1)$$

entonces $T > 48$ es válido cualquier N con $N > e^{48} - 1$.

Equilibrio inestable

Dos problemas con solución $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \begin{cases} x' = -y + \frac{1}{2}x(x^2+y^2-1) \\ y' = x + \frac{1}{2}y(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

bajo la condición inicial $\big(x(0), y(0)\big) = (1, 0)$.

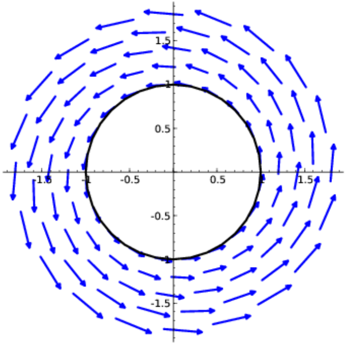
El primero se comporta bien con la aproximación

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \qquad y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

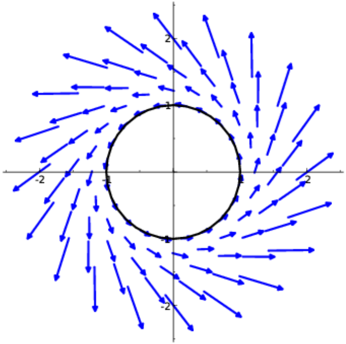
y el segundo no.

Equilibrio inestable

$(x(t), y(t)) =$ posición de la partícula
$(x'(t), y'(t)) =$ dirección en la que se mueve



Primer problema



Segundo problema

Equilibrio inestable

Cualquier leve error que saque a la partícula de la circunferencia unidad, hará que se dirija al infinito.

Solución analítica (problema I)

Con coordenadas polares, $x(t) = r(t)\cos\alpha(t)$, $y(t) = r(t)\operatorname{sen}\alpha(t)$

$$\begin{cases} r'\cos\alpha - r\alpha'\operatorname{sen}\alpha = -r\operatorname{sen}\alpha \\ r'\operatorname{sen}\alpha + r\alpha'\cos\alpha = r\cos\alpha \end{cases}$$

Multiplicando por $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ y sumando:

$$r' = 0 \;\Rightarrow\; r = \text{cte.}$$

Las trayectorias son siempre circunferencias.

Equilibrio inestable

Solución analítica (problema II)

$$\begin{cases} r'\cos\alpha - r\alpha'\operatorname{sen}\alpha = -r\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}r(r^2-1)\cos\alpha \\ r'\operatorname{sen}\alpha + r\alpha'\cos\alpha = r\cos\alpha + \frac{1}{2}r(r^2-1)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Multiplicando por $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ y sumando:

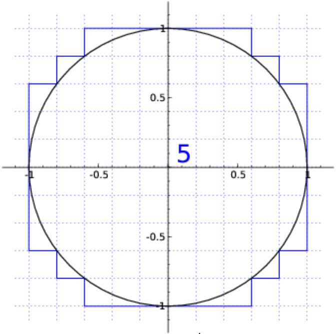
$$r' = \frac{1}{2}r(r^2-1) \xrightarrow{\text{cálculos}} r(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0 e^t}}$$

$r(0) = 1 \Rightarrow \lambda_0 = 0 \Rightarrow r(t) = 1$
$r(0) = 1+\delta \Rightarrow \lambda_0 > 0 \Rightarrow r(t) \to \infty$ si $t \to \ln(1/\lambda_0)$

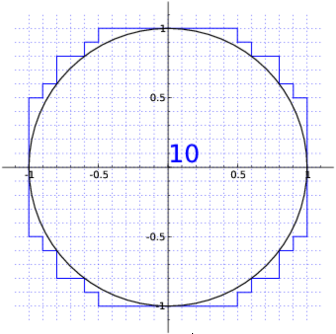
Ej: $r(0) = 1 + 10^{-6} \Rightarrow \lambda_0 \approx 2\cdot 10^{-6} \Rightarrow r(13{,}12\dots) = \infty$

¿Remedando a Arquímedes?

Simplificamos el método de Arquímedes para aproximar la longitud de la circunferencia unidad, 2π, considerando la línea poligonal con segmentos contenidos en $x = nh$, $y = nh$, $n \in \mathbb{Z}$, lo más próxima posible al exterior de la circunferencia.

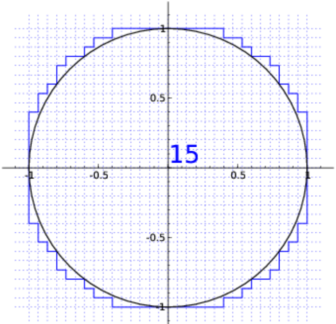


$h = 1/5$

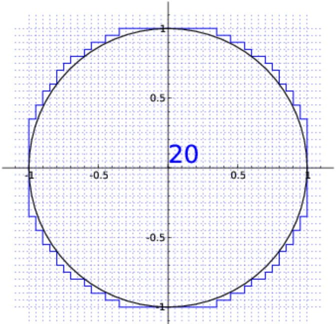


$h = 1/10$

¿Remedando a Arquímedes?



$h = 1/15$



$h = 1/20$

¿Remedando a Arquímedes?

Cuando $h \to 0^+$ la línea poligonal se acerca indefinidamente a la circunferencia.

Con un programa podemos comprobar que para $h = 1/100$ la longitud de la línea poligonal es 8, también lo es para $h = 1/1000$ y para una millonésima.

¿Debemos entonces concluir que $2\pi = 8$ y entonces

$$\boxed{\pi = 4}?$$