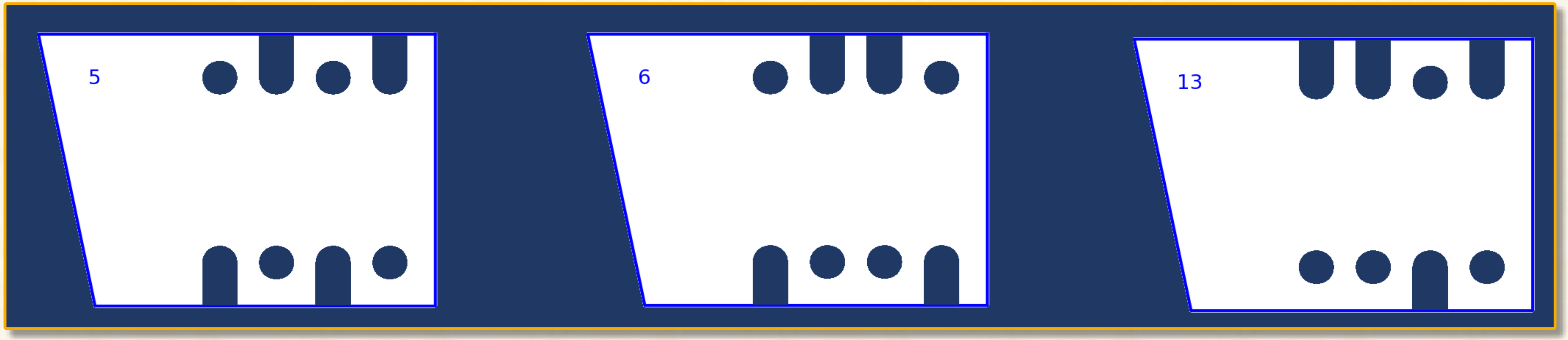
Matemáticas experimentales

Fernando Chamizo

Dulcinea Raboso

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

3 de noviembre de 2014



0 1 0 1

$$0 + 2^2 + 0 + 2^0 = 5$$

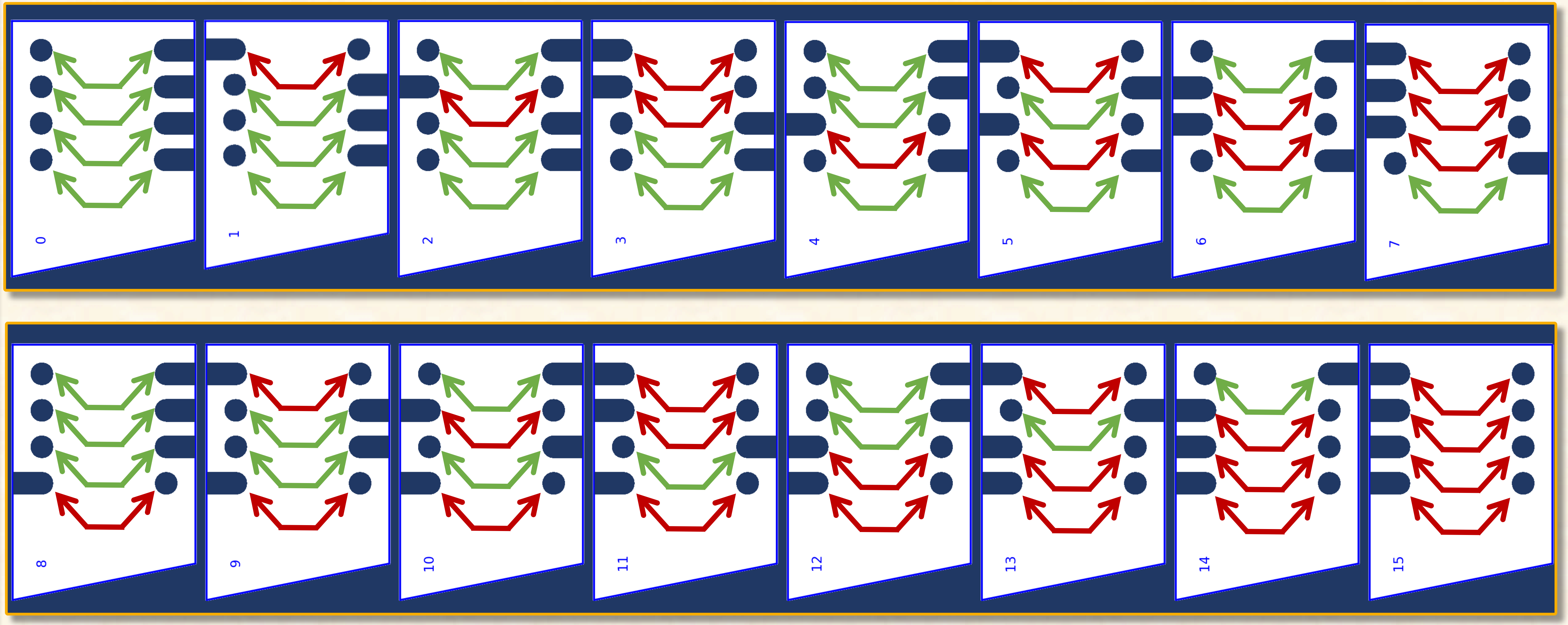
0 1 1 0

$$0 + 2^2 + 2 + 0 = 6$$

1 1 0 1

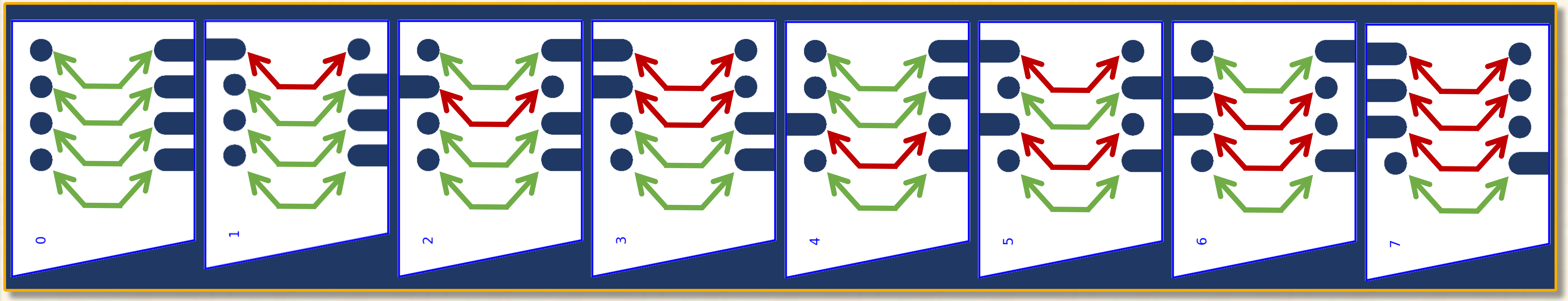
$$2^3 + 2^2 + 0 + 2^0 = 13$$

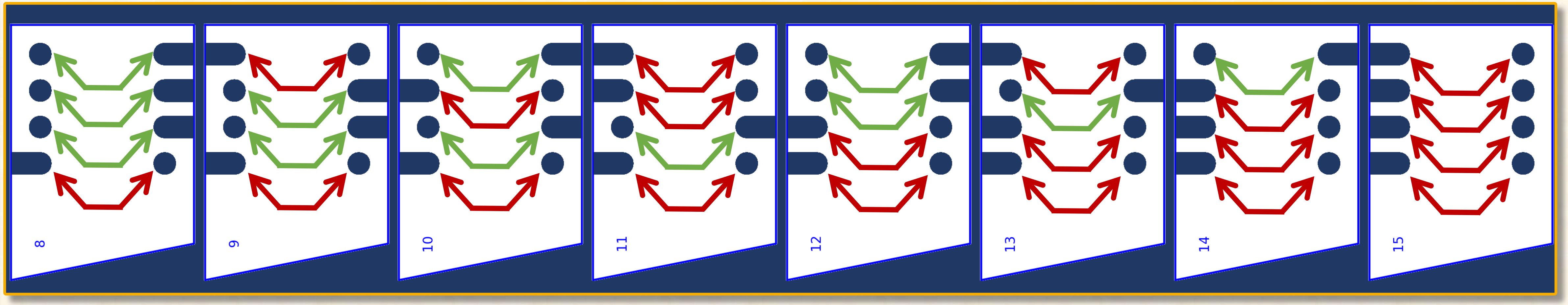
1er movimiento



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

La magia de los números





ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

La magia de los números

Los números binarios son la base de las comunicaciones digitales.

Muchos algoritmos con ordenador se basan en descomposiciones binarias sucesivas, entre ellos algoritmos de ordenación (como con nuestras cartas perforadas) que son indispensables para manejar grandes volúmenes de datos.

Cuando decimos que nuestro ordenador tiene 64 bits, significa que puede manejar hasta 2^{64} datos. Cada bit representa una potencia de dos y todo número se puede escribir como suma de potencias de dos.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Primero los experimentos

$$
\begin{aligned}
(7+4\sqrt{3})^1 &= 13.92820323027550917 4\\
(7+4\sqrt{3})^2 &= 193.9948452238571284 37\\
(7+4\sqrt{3})^3 &= 2701.99962990372428895 1\\
(7+4\sqrt{3})^4 &= 37633.9999734282829168 82\\
(7+4\sqrt{3})^5 &= 524173.99999809223654739 9\\
(7+4\sqrt{3})^6 &= 7300801.99999986302874670 4
\end{aligned}
$$

Después la observación y la conjetura

$$
\begin{aligned}
(7+4\sqrt{3})^1 &= 13.928203230275509174\\
(7+4\sqrt{3})^2 &= 193.9948452238571 28437\\
(7+4\sqrt{3})^3 &= 2701.9996299037242 88951\\
(7+4\sqrt{3})^4 &= 37633.9999734282829 16882\\
(7+4\sqrt{3})^5 &= 524173.9999980922365 47399\\
(7+4\sqrt{3})^6 &= 7300801.9999998630287 46704
\end{aligned}
$$

Parece que al elevar $7+4\sqrt{3}$ a un número, los decimales comienzan con ese mismo número de nueves.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Seguimos experimentando para comprobar la conjetura.

$$
\begin{aligned}
(7+4\sqrt{3})^{6} &= 7300801.99999863028746704\\
(7+4\sqrt{3})^{7} &= 101687053.99999990165906468\\
(7+4\sqrt{3})^{8} &= 1416317953.99999999293943851\\
(7+4\sqrt{3})^{9} &= 19726764301.99999999949307449\\
(7+4\sqrt{3})^{10} &= 274758382273.99999999996360438\\
(7+4\sqrt{3})^{11} &= 3826890587533.99999999999738691\\
(7+4\sqrt{3})^{12} &= 53301709843201.99999999999981238\\
(7+4\sqrt{3})^{13} &= 742397047217293.99999999999998653\\
(7+4\sqrt{3})^{14} &= 10340256951198913.99999999999999903\\
(7+4\sqrt{3})^{15} &= 144021200269567501.99999999999999993
\end{aligned}
$$

La conjetura es falsa

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Fabrique su propio teorema

Conjetura modificada:

El número de nueves es al menos la potencia.

Conjetura arriesgada:

Se añaden dos nueves en los múltiplos de siete.

Si quieres entender del todo a un matemático, debes intentar probar tus conjeturas.

Pista: ¿Qué parte decimal tiene $(7+4\sqrt{3})^k+(7-4\sqrt{3})^k$? La conjetura arriesgada no es cierta pero casi cierta.

Los matemáticos creen que el primer decimal de $10^n\pi$ es un número al azar pero ni siquiera se sabe que el 1 salga infinitas veces.

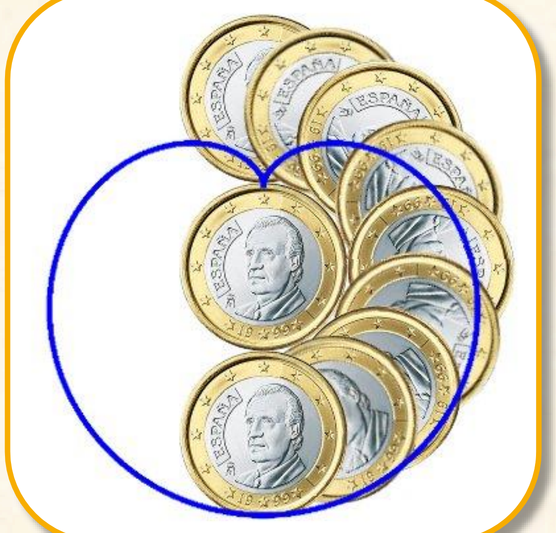
ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Si hacemos girar, sin deslizar, una moneda sobre otra
¿cuántos giros completos dará?

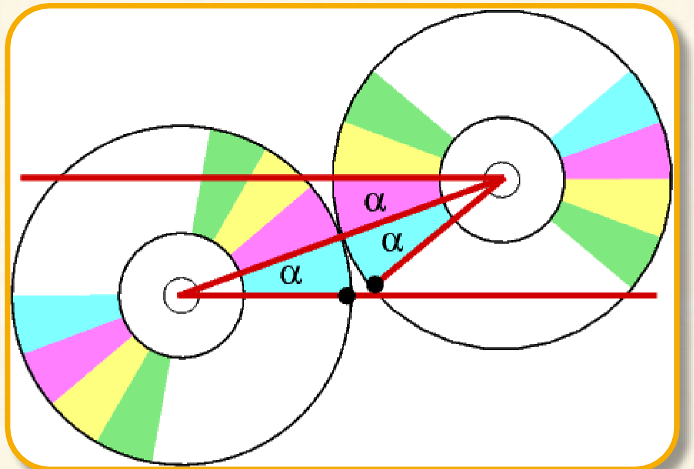
ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Curvas misteriosas

Si hacemos girar, sin deslizar, una moneda sobre otra ¿cuántos giros completos dará?



La moneda que gira da dos vueltas sobre sí misma en vez de una.



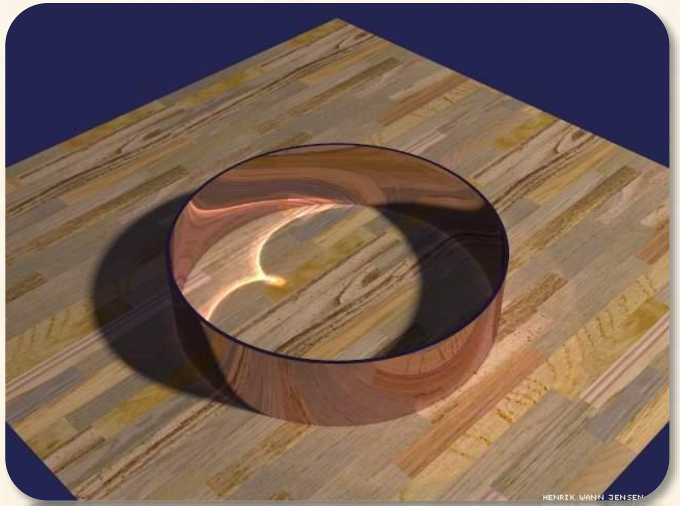
En la práctica, las monedas resbalan. Con CDs es más fácil verlo, usando el agujero central para ir desplazando el CD que gira.

Respecto a la horizontal: $\alpha =$ giro del centro
$\alpha + \alpha =$ giro del punto

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Curvas misteriosas

La curva que describe la trayectoria de cada punto del borde se llama **cardioide**. Ves algo parecido cuando pones una taza o incluso un anillo bajo una taza o incluso un anillo bajo una fuente de luz oblicua:

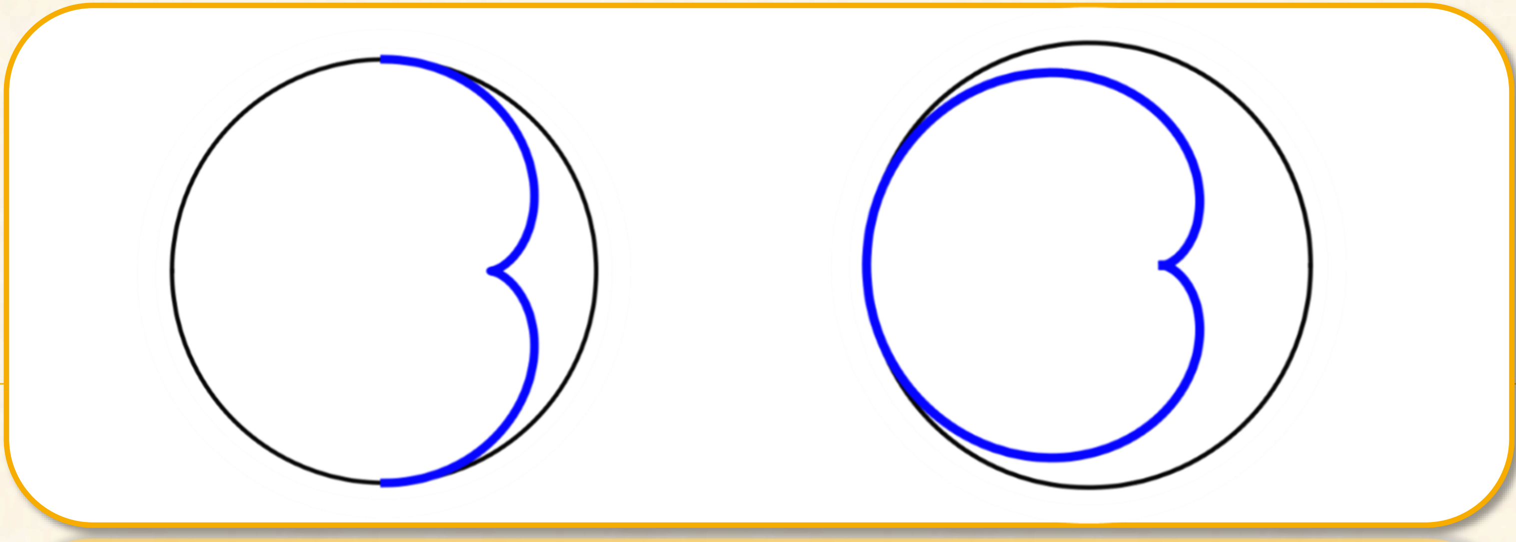


El efecto requiere que la fuente sea puntual. Es claro con una bombilla, una linterna o un foco halógeno pero no con un fluorescente. Es muy fácil verlo bajo estas condiciones.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Curvas misteriosas

Si acercamos la fuente de luz hasta el borde del anillo, el reflejo se encoge hasta dar una cardiode.

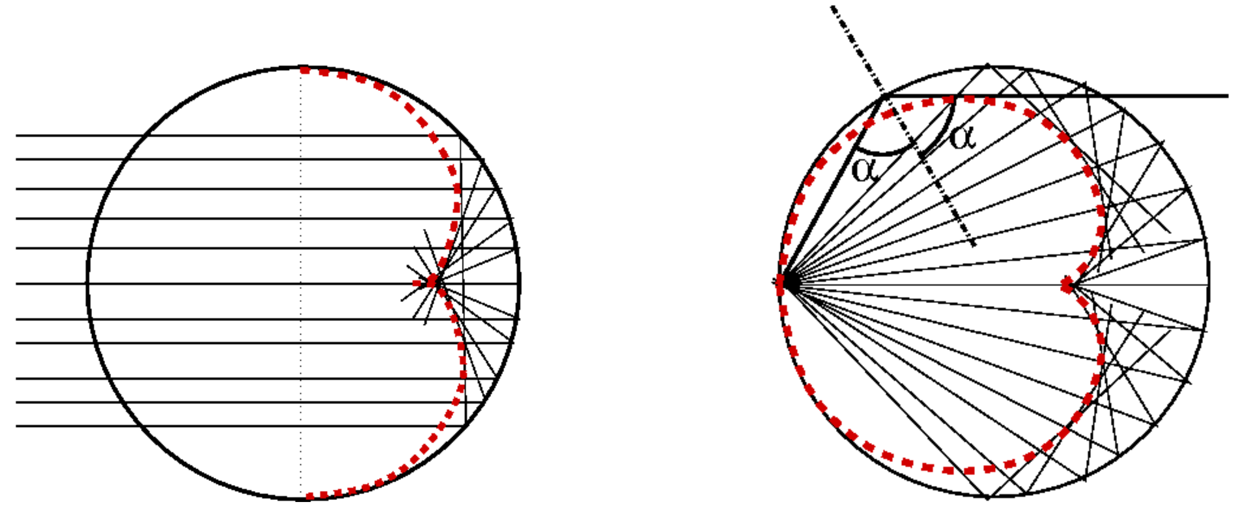


Luz lejana

Luz en el borde

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

¿Por qué se ven estas figuras?

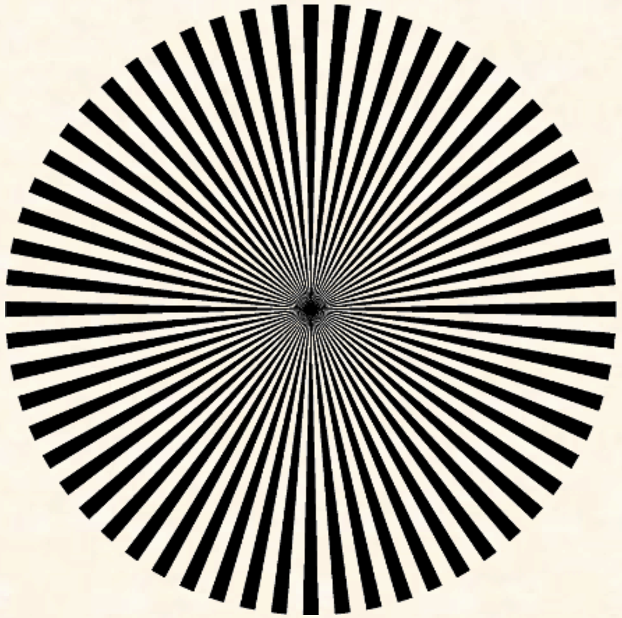


Los rayos de luz se reflejan en el borde circular dando lugar a rayos reflejados que son tangentes a cierta curva. A lo largo de ella se produce una acumulación e inferencia de rayos que muestra una zona especialmente iluminada, igual que se produce un brillo cuando rayos separados se juntan gracias a una lupa.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

El efecto moiré

Imprimamos un montón de sectores muy finos de un círculo grande en una hoja transparente:

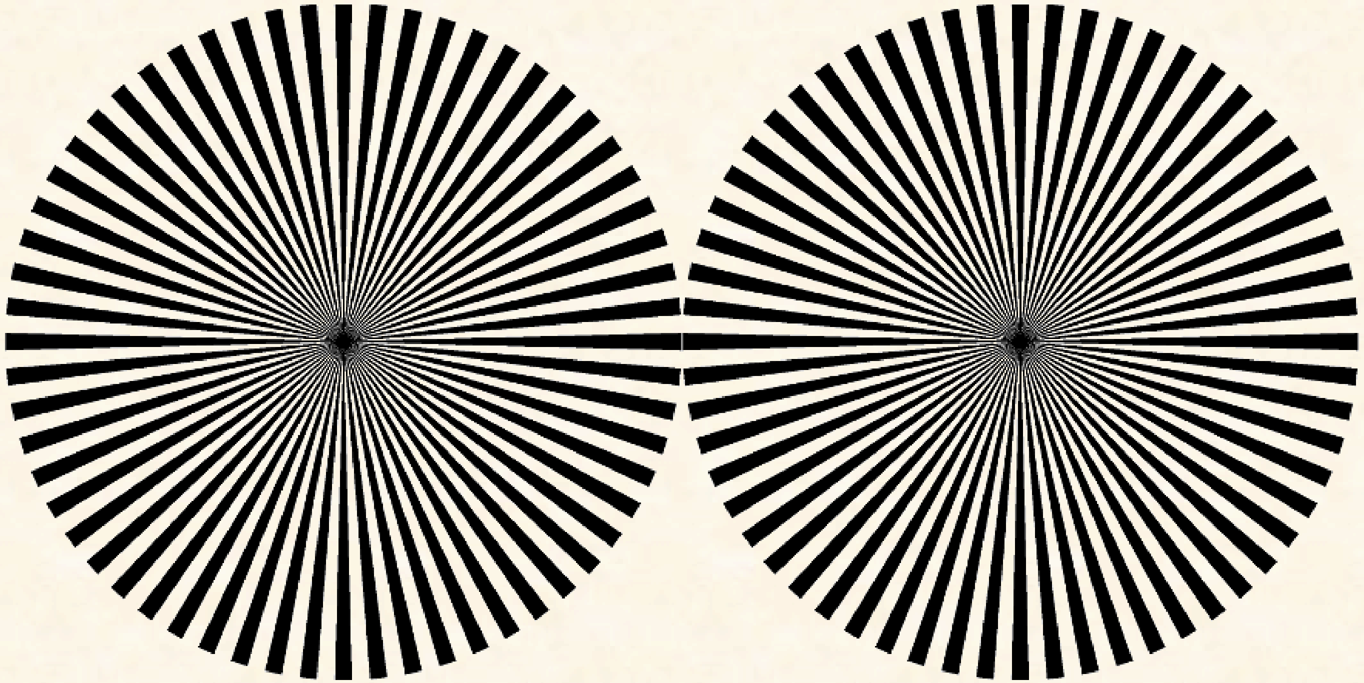


Ya en esta diapositiva se pueden ver unas curvas raras que no aparecen en la realidad.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

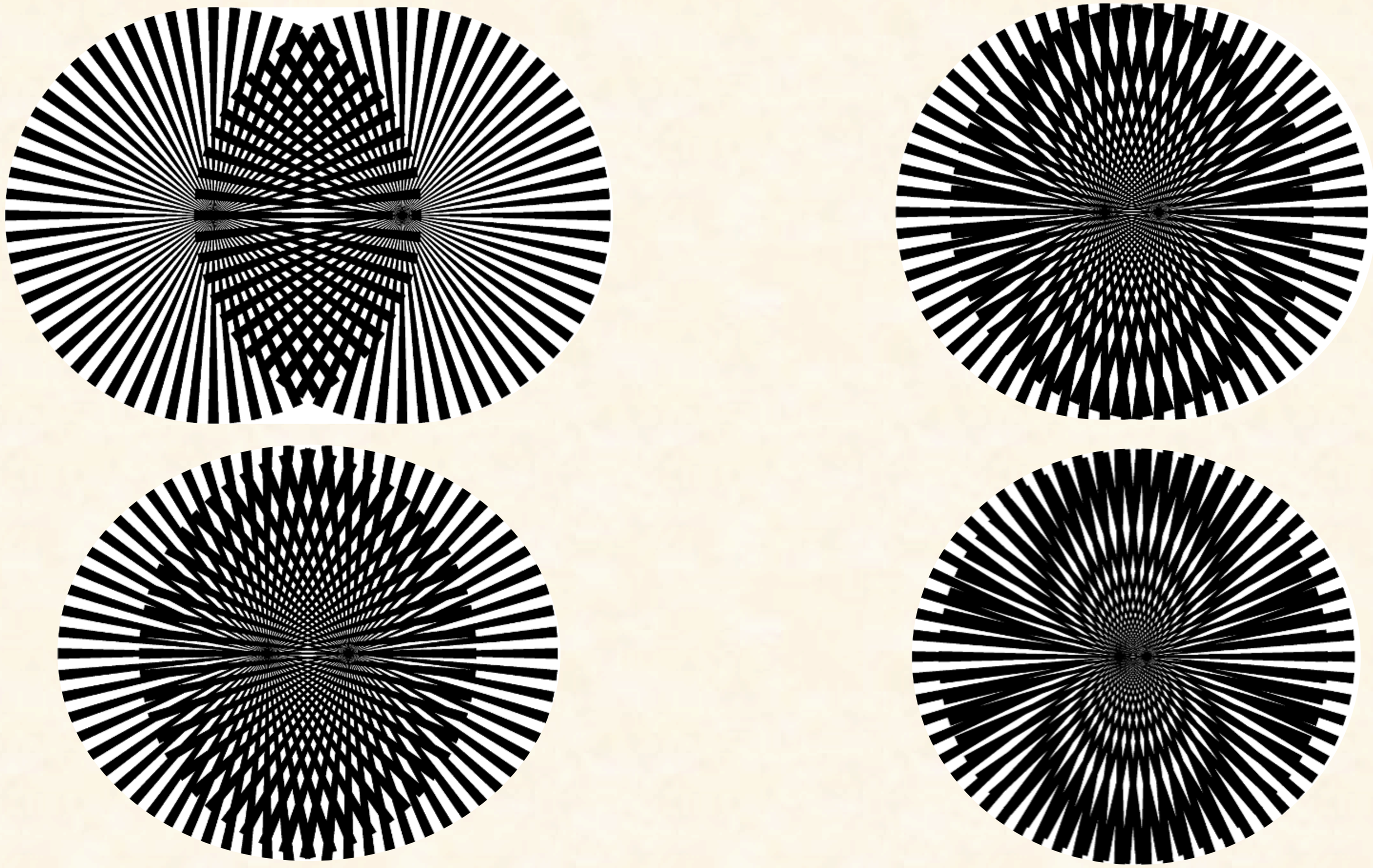
El efecto moiré

Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



El efecto moiré

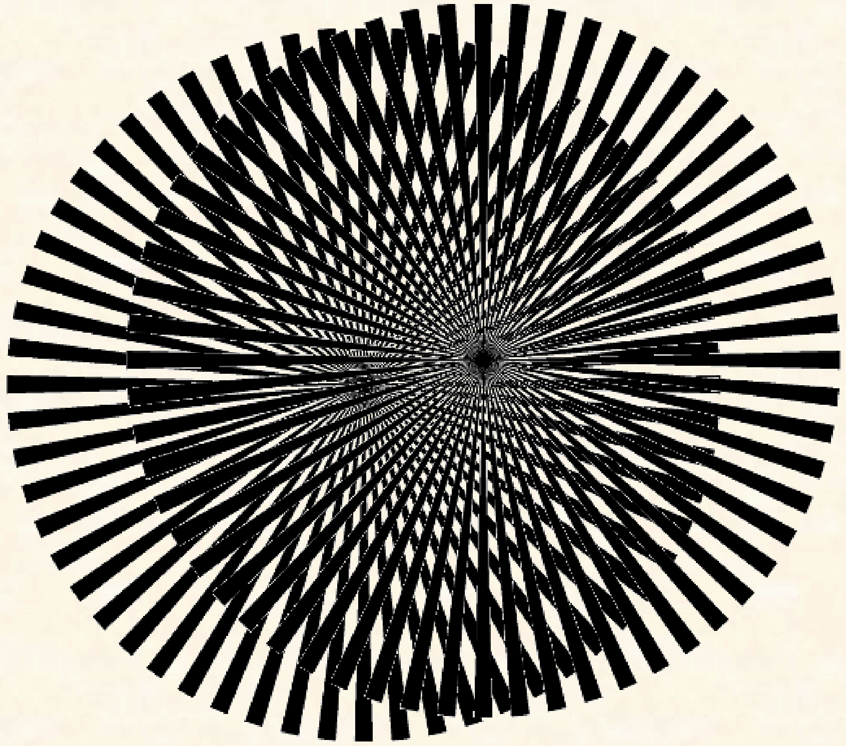
Según acercamos los centros de las imágenes en horizontal, se producen interferencias más nítidas.



Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

El efecto moiré

Si nos apartamos un poco de la horizontal o giramos las imágenes se producen curiosas sensaciones de movimiento:



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

El efecto moiré

El efecto moiré

El **efecto moiré** es un efecto a evitar para la correcta visualización de imágenes estáticas, como las producidas por impresoras, o dinámicas, como las transmitidas por televisión.

También se utiliza en sentido positivo para efectuar mediciones ópticas con cierta precisión y alguna vez ha sido propuesto para dotar las medidas de seguridad de tarjetas bancarias.

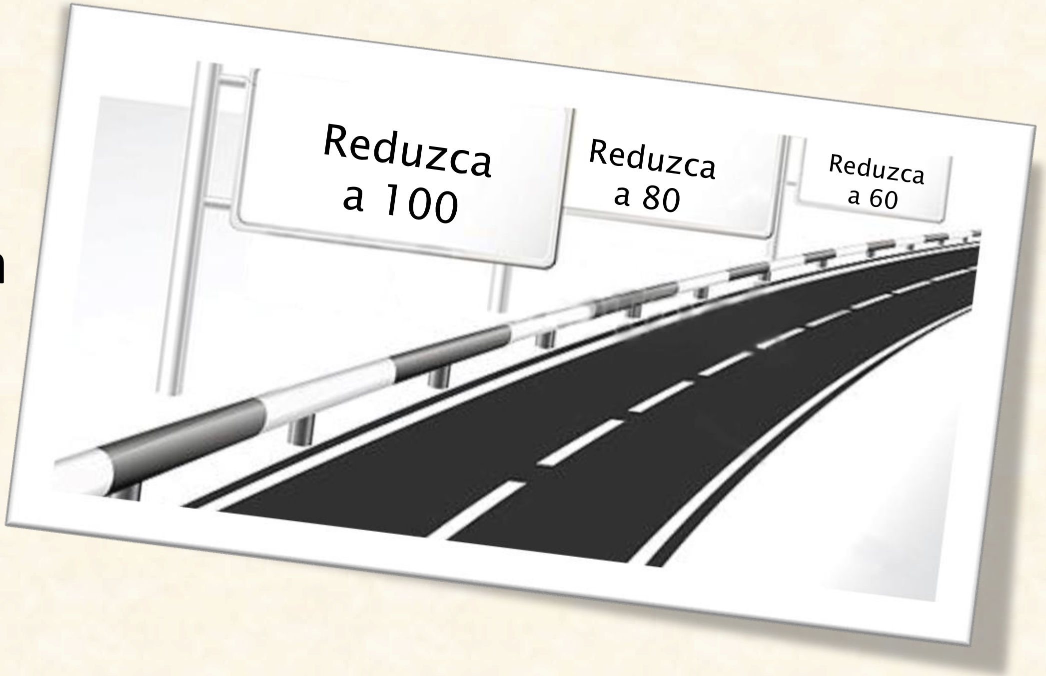
Las matemáticas que hay debajo tienen que ver con el análisis de Fourier que afirma que es posible escribir funciones como superposición de ondas. El efecto de moiré viene de una interferencia entre ellas.

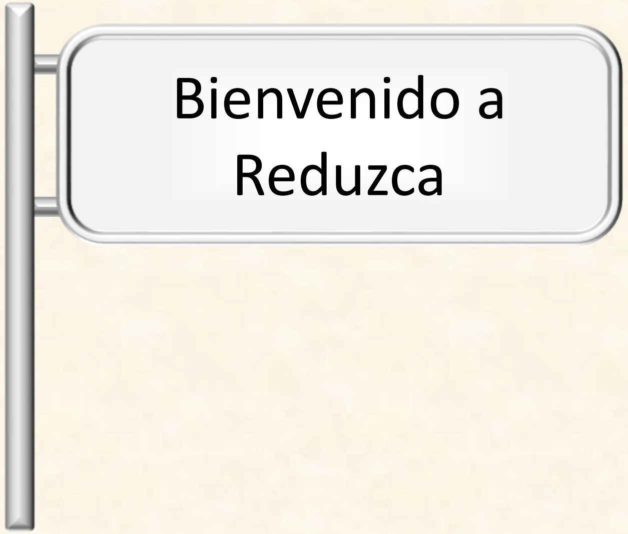
ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

Un chiste malo

Un conductor va por la carretera y ve un cartel que avisa “Reduzca a 100”, después otro que dice “Reduzca a 80” y así sucesivamente, hasta llegar a un gran cartel que indica:





ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

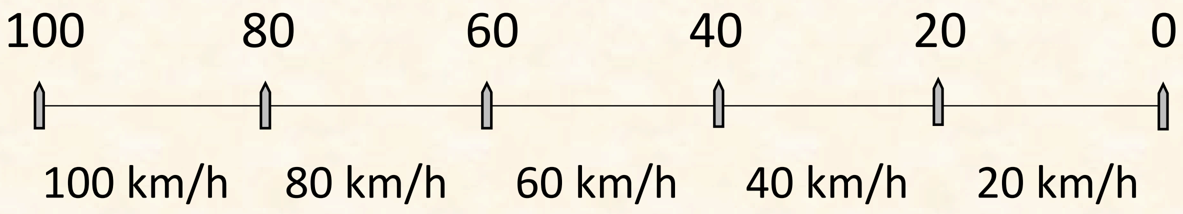
La realidad supera la ficción…

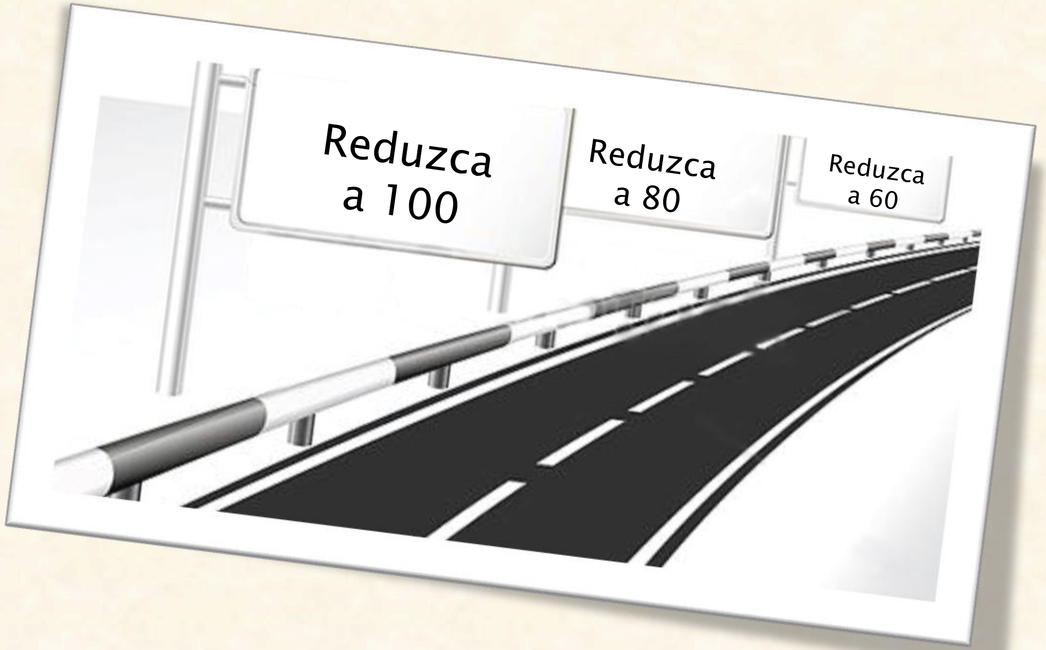
Faro Sabinar
(Almería)

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

Hay 5 tramos de 20 km. El primero se recorre a 100 km/h, el segundo a 80 km/h, hasta el último que se recorre a 20 km/h.





Entonces se tarda:

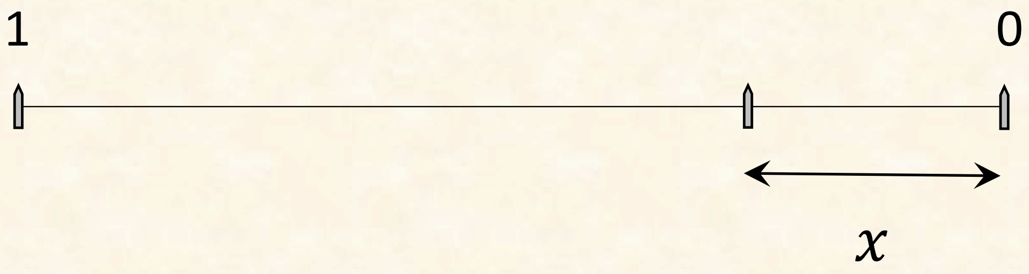
$$\Delta t = \frac{\Delta e}{v} \Longrightarrow T = \frac{20}{100} + \frac{20}{80} + \frac{20}{60} + \frac{20}{40} + \frac{20}{20} = \frac{137}{60} = 2 \text{ h. } 17 \text{ m.}$$

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

Los logaritmos neperianos son muy importantes y, aunque parezca mentira, J. Neper los inventó en 1614 mediante una variante de este chiste.

En el caso de Neper, la distancia inicial era 1 y había infinitas señales, con lo cual el coche nunca llegaba.



$$\boxed{-\ln x = \text{tiempo en llegar a distancia } x}$$

Los logaritmos permiten pasar multiplicaciones a sumas, divisiones a restas y raíces a divisiones.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

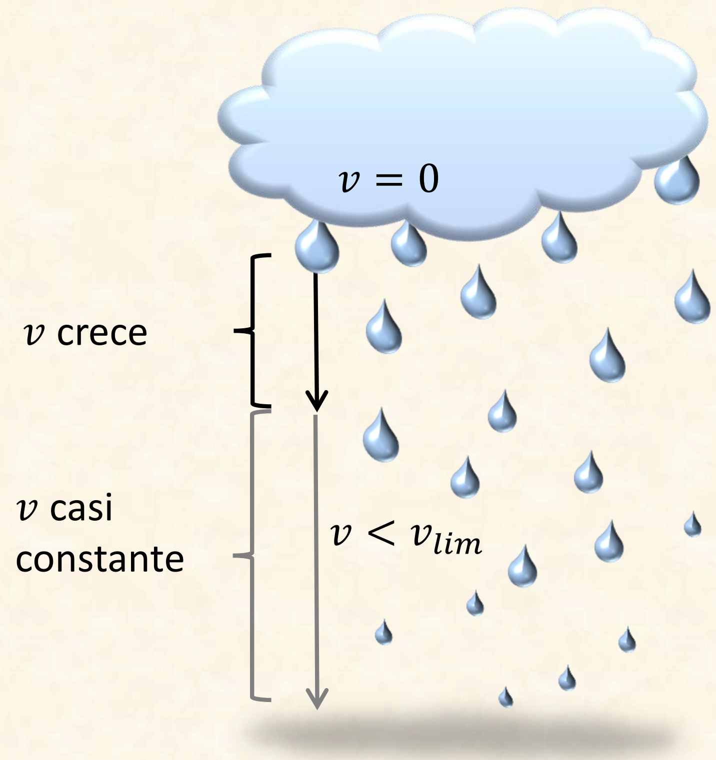
Hay situaciones en las que la velocidad se comporta como el espacio recorrido en el chiste: se incrementa cada vez menos y hay una **velocidad límite**.

¿A qué velocidad cae la lluvia?

¿Por qué los paracaidistas llevan gafas?

Dependiendo de las condiciones, se tiene:

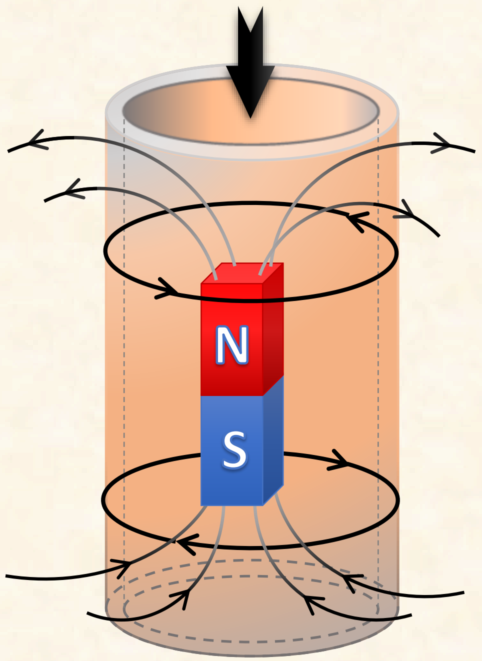
- Gotas de lluvia gruesa: $v_{lim} = 36$ km/h
- Salto en paracaídas: $v_{lim} = 200$ km/h



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

Un ejemplo menos conocido es el de un imán que cae por un tubo metálico que no sea paramagnético (que no se pegue al imán).



Un campo magnético que varía mueve los electrones de metal que, a su vez crean otro campo magnético. Según la ley de Lenz, estos campos son opuestos.

Rápidamente la velocidad del imán se acerca a la velocidad límite, que es pequeña si el imán es potente.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Velocidad límite

La misma propiedad que ralentiza la caída del imán se utiliza en la práctica para diseñar frenos con ventajas frente a los frenos hidráulicos, por ejemplo, un menor desgaste.

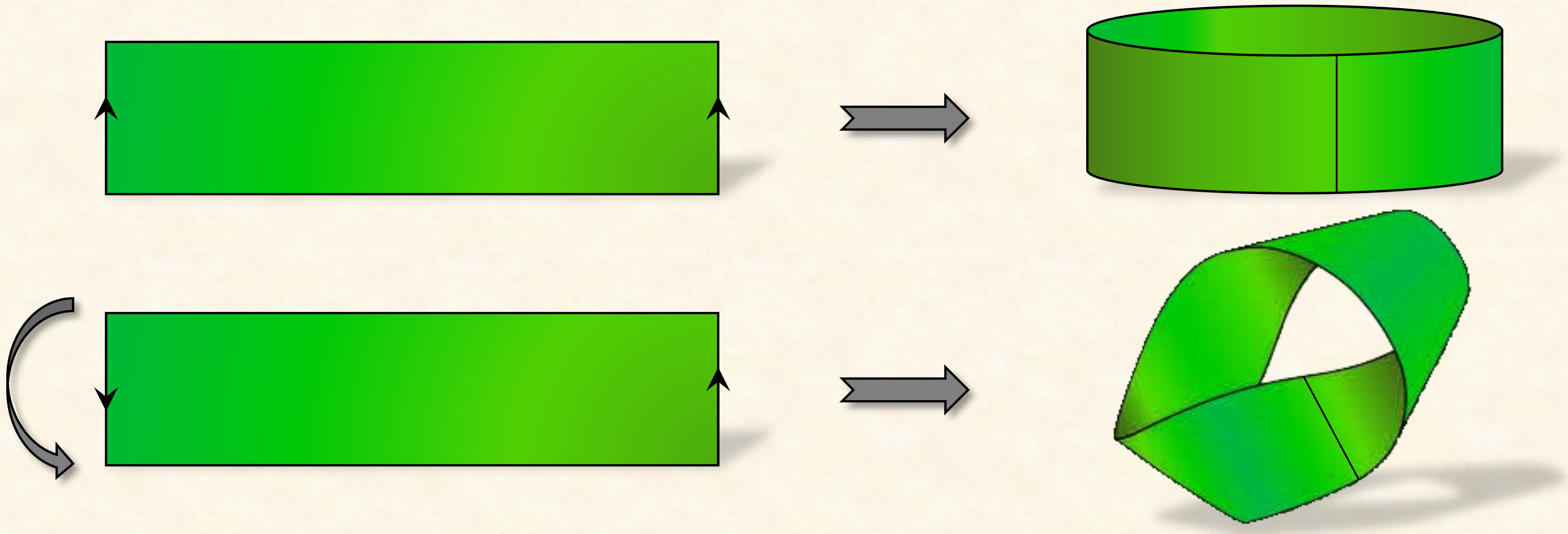
ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

¿Qué tienen en común?

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

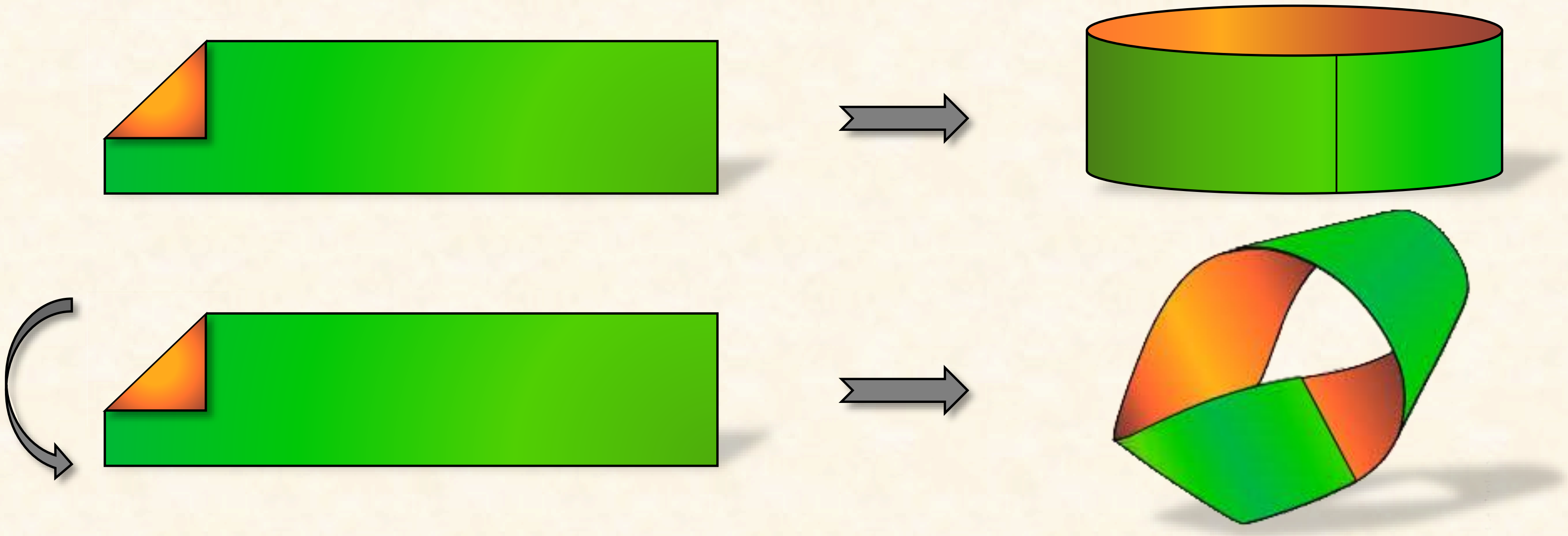
La **banda de Möbius** es una superficie (dimensión dos), con un único borde y una única cara que además es no orientable.



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

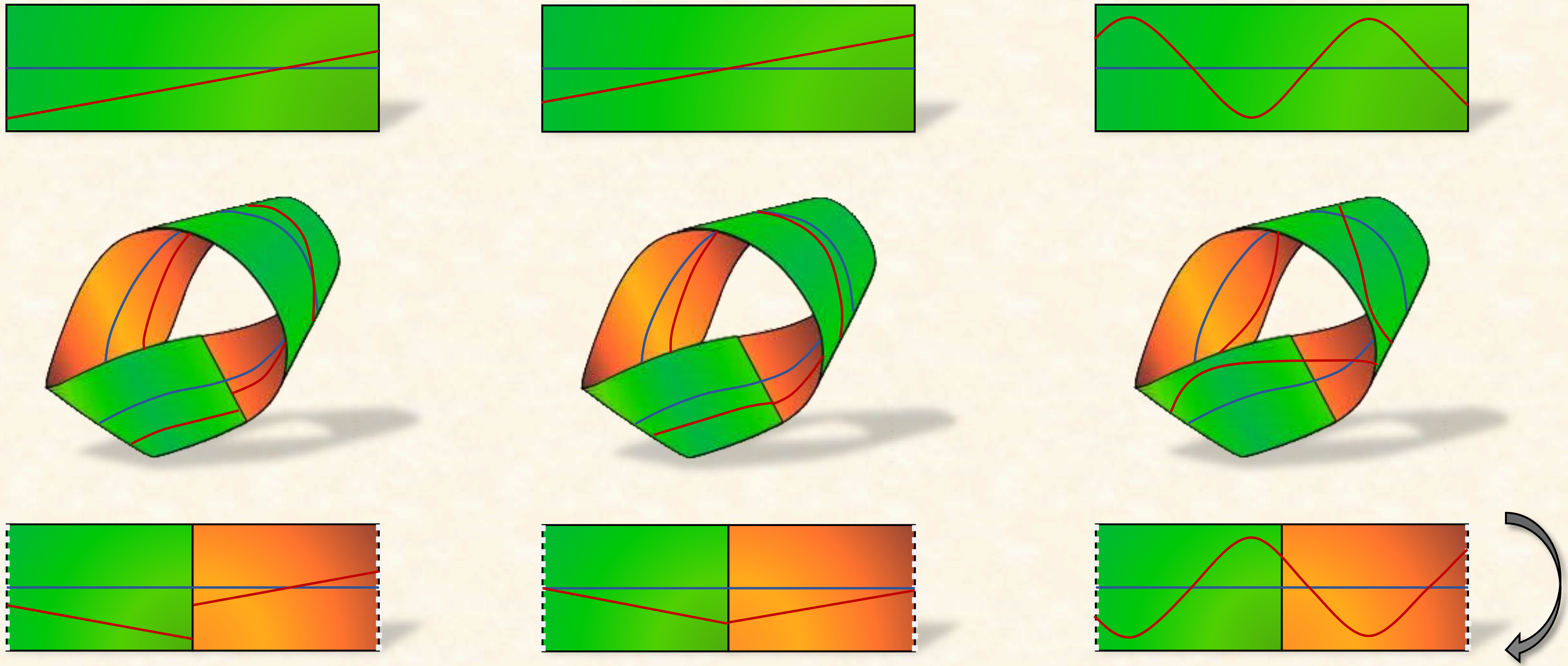
La **banda de Möbius** es una superficie (dimensión dos), con un único borde y una única cara que además es no orientable.



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

Tiene curiosas propiedades

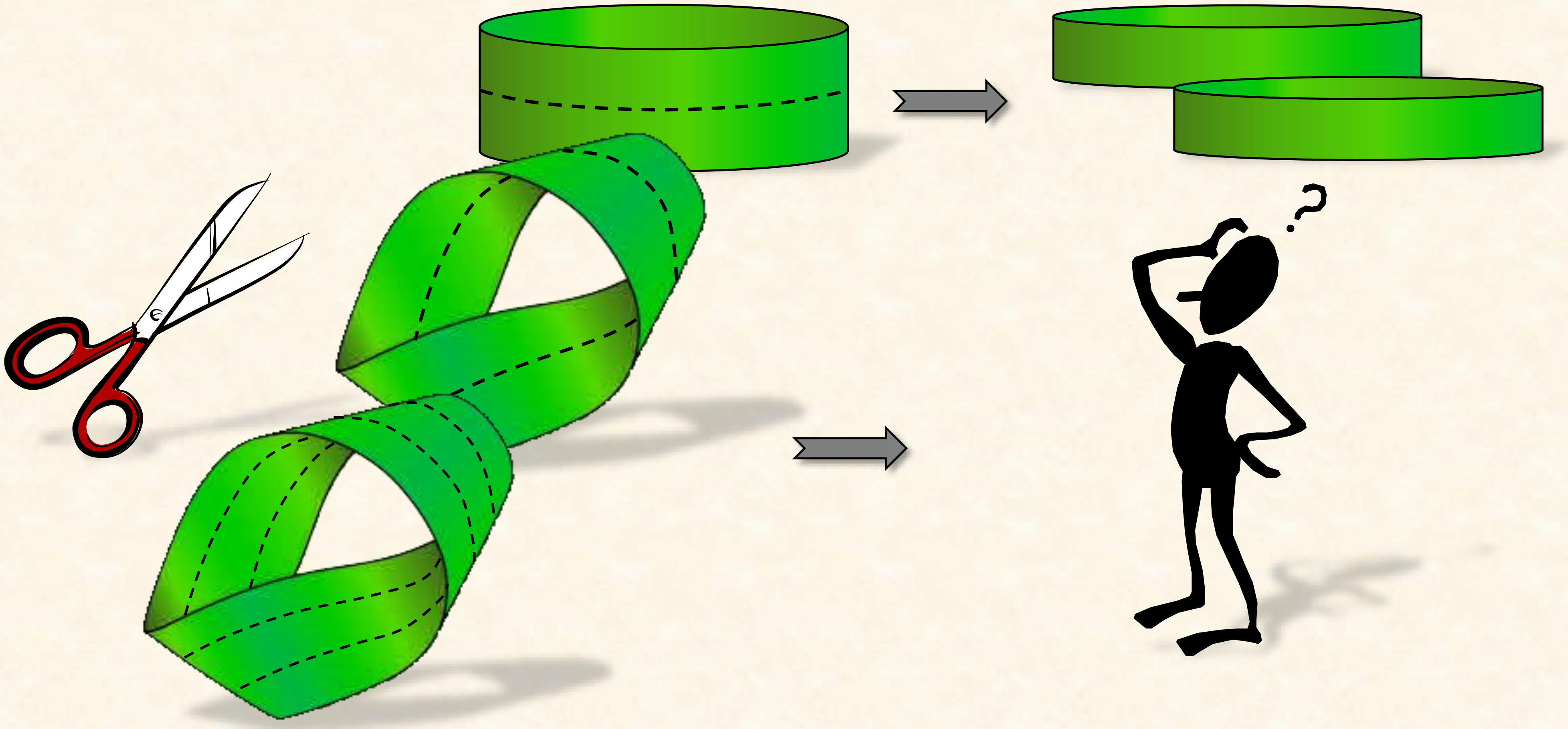


ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

Tiene curiosas propiedades

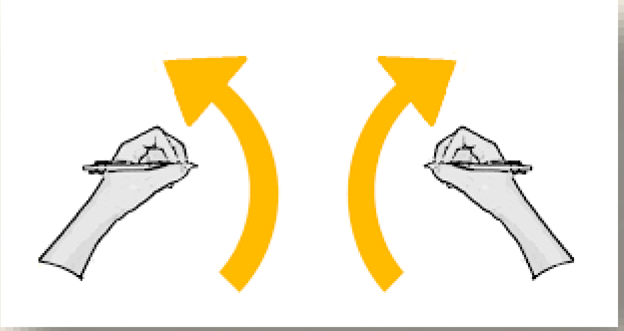
...y alguna aplicación para
el 14 de febrero



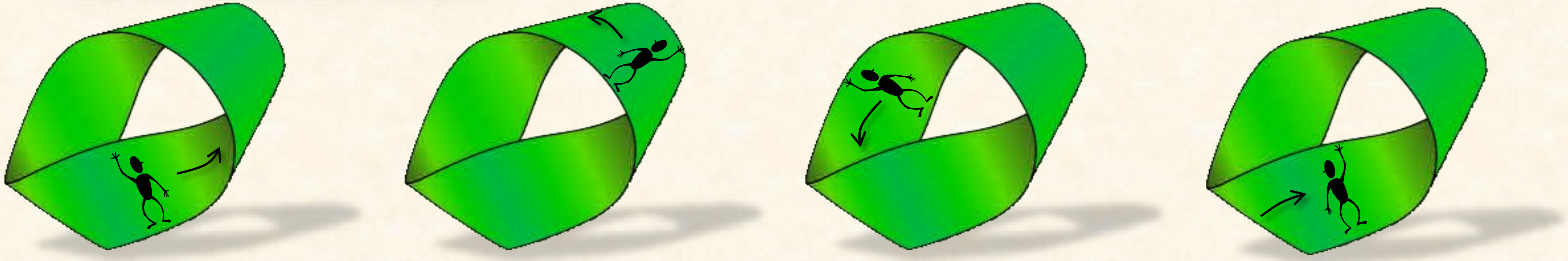
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

El hecho de que sólo haya una cara tiene consecuencias sorprendentes.



Un habitante (bidimensional) que viviera dentro de la banda de Möbius, si se cansara de ser diestro no tendría más que dar un paseo por su mundo.



ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

Banda de Möbius

La banda de Möbius ha sido empleada con fines industriales en diferentes contextos.

Pensemos en una cadena de bicicleta, una correa de distribución, o cualquier cadena que realice una cierto recorrido.
Si la colocamos en forma cilíndrica, siempre se desgastaría por el mismo sitio, ya que siempre rozaría en los apoyos por la misma cara.
Si ahora colocamos la cadena como una banda de Möbius, conseguimos que el desgaste sea igual en todos los puntos, obteniendo así una mayor duración y por tanto ahorro.

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso

ICMAT
Fernando Chamizo
Dulcinea Raboso