Probabilidad e intuición I

Fernando Chamizo

Fundamentación de las Matemáticas

22 de octubre de 2012

http://www.uam.es/fernando.chamizo

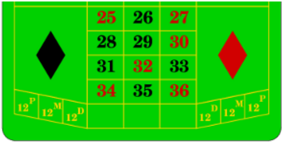
Resumen:

Todos tenemos una idea intuitiva de la probabilidad y por ello las paradojas que aparecen en esta disciplina son de las más chocantes en Matemáticas para un público general. A través de ejemplos se busca ilustrar esta situación y motivar una fundamentación matemática del concepto probabilidad.

Índice

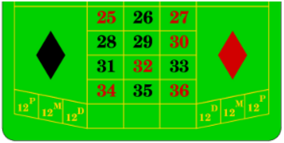
¿Se puede ganar siempre en el casino?

En la ruleta jugar a rojo o negro es como jugar a cara o cruz.



¿Se puede ganar siempre en el casino?

En la ruleta jugar a rojo o negro es como jugar a cara o cruz.



La probabilidad de ganar o de perder apostando a rojo es del 50 %. Eso significa que, de acuerdo con la experiencia, nuestras expectativas de ganar o perder, son las mismas.

La martingala

Supongamos que comenzamos apostando un euro a rojo, si ganamos, nos retiramos y si perdemos apostamos doble a rojo y repetimos este proceso de duplicar la apuesta tantas veces como perdamos y nos retiramos la primera vez que ganemos.

El número de tiradas r que tarde en salir rojo, sorprendentemente no afecta a nuestras ganancias.

La martingala

Supongamos que comenzamos apostando un euro a rojo, si ganamos, nos retiramos y si perdemos apostamos doble a rojo y repetimos este proceso de duplicar la apuesta tantas veces como perdamos y nos retiramos la primera vez que ganemos.

El número de tiradas r que tarde en salir rojo, sorprendentemente no afecta a nuestras ganancias.

♦	$r = 1$	$\longrightarrow$	gano $1€$
♦♦	$r = 2$	$\longrightarrow$	gano $2 - 1 = 1€$
♦♦♦	$r = 3$	$\longrightarrow$	gano $4 - 2 - 1 = 1€$
♦♦♦♦	$r = 4$	$\longrightarrow$	gano $8 - 4 - 2 - 1 = 1€$
♦♦♦♦♦	$r = 5$	$\longrightarrow$	gano $16 - 8 - 4 - 2 - 1 = 1€$

La ganancia, sea cual sea el número de tiradas que tarde en salir rojo es 1€ gracias a la fórmula matemática

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{r-1} = 2^r - 1.$$

La ganancia, sea cual sea el número de tiradas que tarde en salir rojo es 1€ gracias a la fórmula matemática

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{r-1} = 2^r - 1.$$

Si esto parece poco ambicioso, con una apuesta inicial de 100€ se ganarán 100€.

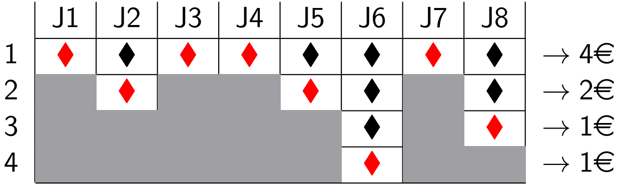
Está claro que antes o después saldrá rojo, por tanto con esta estrategia siempre ganaré pero un juego de cara y cruz es equitativo y las probabilidades de ganar son del 50 %.

Nota: Los juegos de ruleta reales no son exactamente equitativos, si sale el 0, lo cual ocurre con probabilidad 2.7 %, la banca se lleva todo. Si los juegos de azar fueran equitativos no existirían los casinos.

Si todos los jugadores siguieran la misma estrategia, aparentemente arruinarían al casino.

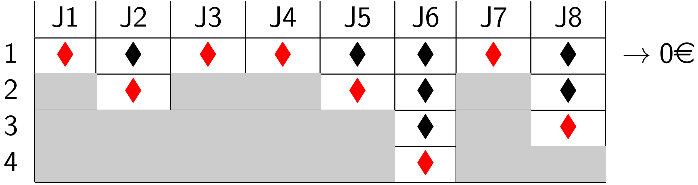
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	
1	♦	◆	♦	♦	◆	◆	♦	◆	$\rightarrow$ 4€
2		♦			♦	◆		◆	$\rightarrow$ 2€
3						◆		♦	$\rightarrow$ 1€
4						♦			$\rightarrow$ 1€

Si todos los jugadores siguieran la misma estrategia, aparentemente arruinarían al casino.



Los ocho jugadores J1-J8 ganan 1€, el casino pierde 8€.

Por otra parte el casino sabe que en cada turno la mitad de los jugadores perderán y por tanto en promedio el balance entre sus pérdidas y ganancias es cero.



Por otra parte el casino sabe que en cada turno la mitad de los jugadores perderán y por tanto en promedio el balance entre sus pérdidas y ganancias es cero.

	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	
1	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
2	J9	$\color{red}\blacklozenge$	$\color{red}\text{J10}$	J11	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\text{J12}$	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
3						$\blacklozenge$		$\color{red}\blacklozenge$	
4						$\color{red}\blacklozenge$			

Por otra parte el casino sabe que en cada turno la mitad de los jugadores perderán y por tanto en promedio el balance entre sus pérdidas y ganancias es cero.

	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	
1	♦	◆	♦	♦	◆	◆	♦	◆	$\to$ 0€
2	J9	♦	J10	J11	♦	◆	J12	◆	$\to$ 0€
3	◆	J13	J14	♦	J15	◆	J16	♦	$\to$ 0€
4						♦			

Por otra parte el casino sabe que en cada turno la mitad de los jugadores perderán y por tanto en promedio el balance entre sus pérdidas y ganancias es cero.

	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	
1	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
2	J9	$\color{red}\blacklozenge$	J10	J11	$\color{red}\blacklozenge$	$\blacklozenge$	J12	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
3	$\blacklozenge$	J13	J14	$\color{red}\blacklozenge$	J15	$\blacklozenge$	J16	$\color{red}\blacklozenge$	$\to$ 0€
4	$\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}\blacklozenge$	J17	J18	$\color{red}\blacklozenge$	J19	J20	$\to$?

Por otra parte el casino sabe que en cada turno la mitad de los jugadores perderán y por tanto en promedio el balance entre sus pérdidas y ganancias es cero.

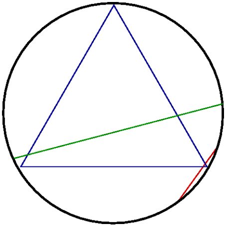
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	
1	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\blacklozenge$	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
2	J9	$\color{red}{\blacklozenge}$	J10	J11	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\blacklozenge$	J12	$\blacklozenge$	$\to$ 0€
3	$\blacklozenge$	J13	J14	$\color{red}{\blacklozenge}$	J15	$\blacklozenge$	J16	$\color{red}{\blacklozenge}$	$\to$ 0€
4	$\blacklozenge$	$\blacklozenge$	$\color{red}{\blacklozenge}$	J17	J18	$\color{red}{\blacklozenge}$	J19	J20	$\to$?

Los veinte jugadores J1-J20 han disputado en total 32 turnos y han perdido la mitad de ellos.

Un problema, varias soluciones

La paradoja de Bertrand

¿Cuál es la probabilidad de que una cuerda elegida al azar en la circunferencia sea más larga que el lado del triángulo inscrito?



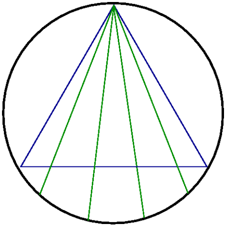
— cuerda más corta

— cuerda más larga

Es difícil dudar de que éste es un problema matemático bien planteado porque, incluso si no lo sabemos resolver, parece que podríamos hacer una aproximación experimental eligiendo muchas cuerdas.

Dos soluciones:

1)

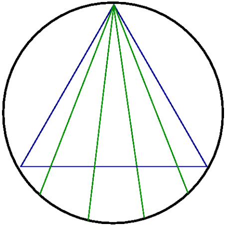


ángulo central
prob $= 1/3$

1) La tercera parte de las cuerdas que parten de un punto caen en el ángulo central.

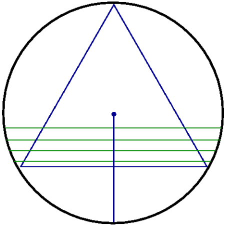
Dos soluciones:

1)



ángulo central
prob $= 1/3$

2)



radio perpendicular
prob $= 1/2$

1) La tercera parte de las cuerdas que parten de un punto caen en el ángulo central.

2) La mitad de las cuerdas perpendiculares a un radio están en la mitad más cercana al centro.

Los axiomas de la probabilidad

En 1933, A. Kolmogorov introdujo la probabilidad de manera axiomática. Con ello dio su fundamentación matemática rigurosa.

Los axiomas de la probabilidad

En 1933, A. Kolmogorov introdujo la probabilidad de manera axiomática. Con ello dio su fundamentación matemática rigurosa.

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Por ejemplo, al tirar una moneda dos veces, el espacio muestral es

$\Omega = \{$  ,  ,  ,  $\}$.

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo $\{$  $\}$ es *salir dos caras* y el suceso *salir al menos una cara* sería $\{$  ,  ,  $\}$

Se llama **probabilidad** a una función que “mide” los sucesos y que satisface los siguientes tres axiomas (propiedades)

1. La probabilidad es un número ≥ 0
2. La probabilidad del total (espacio muestral) es 1
3. La probabilidad de la unión sucesos disjuntos es su suma

Se llama **probabilidad** a una función que "mide" los sucesos y que satisface los siguientes tres axiomas (propiedades)

1. La probabilidad es un número≥ 0
2. La probabilidad del total (espacio muestral) es 1
3. La probabilidad de la unión sucesos disjuntos es su suma

Con esta abstracción, las Matemáticas evitan el problema del significado de la probabilidad, que pasa a ser una función introducida por nosotros desligada del mundo físico pero, por supuesto, motivada por él en cada una de las aplicaciones.

Por ejemplo, podemos inventar una función de probabilidad P con
$P\Big($$\Big) = \frac{1}{9}$, $P\Big($$\Big) = P\Big($$\Big) = \frac{2}{9}$, $P\Big($$\Big) = \frac{4}{9}$
que no corresponde a una moneda normal pero que sería útil para representar otra cargada.

Una función de probabilidad con $P\Big($$\Big) \neq P\Big($$\Big)$ podría representar una moneda que de alguna manera se daña al salir cara.

De esta forma, conjeturas como la de Bertrand no llevan a ninguna contradicción matemática, las diferentes soluciones corresponden a diferentes maneras de llevar a cabo el experimento.

Mayor=menor

La **paradoja de Simpson** permite deducir conclusiones opuestas a partir de los mismos datos. A pesar de que tiene más de 100 años se incurre con frecuencia en ella en los medios de comunicación y en los estudios científicos al interpretar estadísticas.

Mayor=menor

La **paradoja de Simpson** permite deducir conclusiones opuestas a partir de los mismos datos. A pesar de que tiene más de 100 años se incurre con frecuencia en ella en los medios de comunicación y en los estudios científicos al interpretar estadísticas.

Uno de los casos más famosos es una acusación por discriminación sexual contra la prestigiosa Universidad de Berkeley.

La situación era que prácticamente los mismos varones que mujeres solicitaban comenzar el doctorado pero se admitía a más varones. Por lo cual, la probabilidad de ser admitido era menor siendo mujer. La universidad investigó la situación y observó que típicamente en los diferentes departamentos era mayor la probabilidad de ser admitido al doctorado si se era mujer.

Imaginemos un mundo educativo extraño donde sólo hay dos asignaturas: Filosofía y Matemáticas y los estudiantes sólo deben escoger una de ellas.
Supongamos que hay 2600 estudiantes matriculados, 1300 hombres y 1300 mujeres, y que la distribución de matriculados y aprobados viene dada por las siguientes tablas:

Matriculados

	Filos.	Mat.
Hombres	800	500
Mujeres	500	800

Aprobados

	Filos.	Mat.
Hombres	200	400
Mujeres	100	600

Matriculados

	Filos.	Mat.
Hombres	800	500
Mujeres	500	800

Aprobados

	Filos.	Mat.
Hombres	200	400
Mujeres	100	600

Matriculados

	Filos.	Mat.
Hombres	800	500
Mujeres	500	800

Aprobados

	Filos.	Mat.
Hombres	200	400
Mujeres	100	600

Las mujeres aprueban más que los hombres ya que sus probabilidades son $700/1300$ frente a $600/1300$.

Matriculados

	Filos.	Mat.
Hombres	800	500
Mujeres	500	800

Aprobados

	Filos.	Mat.
Hombres	200	400
Mujeres	100	600

Las mujeres aprueban más que los hombres ya que sus probabilidades son $700/1300$ frente a $600/1300$.

Las mujeres suspenden más que los hombres en cualquiera de las asignaturas ya que en Filosofía sus probabilidades son $100/500$ frente a $200/800$ de los hombres, y en Matemáticas de $600/800$ frente a $400/500$ de los hombres.

Desafortunadamente, a menudo en los medios la malinterpretación (y a veces manipulación) de probabilidades y de estadísticas es más burda.

Los errores en la toma de datos afectan al modelo de probabilidad escogido y no son fáciles de rebatir por el "ciudadano de a pie" que no tiene capacidad para tomar muestras. El caso típico son las encuestas con resultados incompatibles hechas por diferentes medios.

Los errores en la interpretación de los datos son comunes y, sin llegar a las sutilidades de la paradoja de Simpson, nos harían dudar en una lectura somera y nos engañarían si no se nos indica el procedimiento.

Veamos dos ejemplos reales (tomados de `www.malaprensa.com`).

El correo (22/08/12) “Las mujeres vascas son las más longevas de Europa, con 85.7 años”

Datos en el artículo: Euskadi, 85,7 años. España, 85,3. Francia, 85,3. Malta, 83,6. Suecia 83,6. Finlandia, 83,5. Alemania, 83. . .

El correo (22/08/12) "Las mujeres vascas son las más longevas de Europa, con 85.7 años"

Datos en el artículo: Euskadi, 85,7 años. España, 85,3. Francia, 85,3. Malta, 83,6. Suecia 83,6. Finlandia, 83,5. Alemania, 83...

Hechos: Ya sólo en España hay al menos otras cuatro comunidades con mayor longevidad femenina. Una población más grande tiende a suavizar la media. En el País Vasco sólo hay 2.2 millones de habitantes frente a 66 de Francia. Madrid tiene casi el triple de habitantes que el País Vasco y una longevidad femenina mayor.

El correo (22/08/12) "Las mujeres vascas son las más longevas de Europa, con 85.7 años"

<u>Datos en el artículo</u>: Euskadi, 85,7 años. España, 85,3. Francia, 85,3. Malta, 83,6. Suecia 83,6. Finlandia, 83,5. Alemania, 83...

<u>Hechos</u>: Ya sólo en España hay al menos otras cuatro comunidades con mayor longevidad femenina. Una población más grande tiende a suavizar la media. En el País Vasco sólo hay 2.2 millones de habitantes frente a 66 de Francia. Madrid tiene casi el triple de habitantes que el País Vasco y una longevidad femenina mayor.

Si la media de la clase es un 6 y mi primo y yo tenemos un 6.1 entonces ¿hemos tenido la mejor nota?

rtve.es (14/04/12) “Los conductores españoles desconocen más de la mitad de las señales de tráfico”

Datos (no están en el artículo): Se hizo un test con 4 opciones para las siguientes señales y el porcentaje de aciertos fue

67.6 % 98.7 % 59.9 % 53.1 % 13.5 % 18.6 % 40.4 % 68.4 %

rtve.es (14/04/12) “Los conductores españoles desconocen más de la mitad de las señales de tráfico”

Datos (no están en el artículo): Se hizo un test con 4 opciones para las siguientes señales y el porcentaje de aciertos fue

67.6 % 98.7 % 59.9 % 53.1 % 13.5 % 18.6 % 40.4 % 68.4 %

Hechos: El porcentaje supera el 50.0 % (!!). Algunas señales son poco comunes. Había varias veces opciones muy próximas (calzada con dos carriles 31.1 %, Peligro: circulación en ambos sentidos 67.6 %).

rtve.es (14/04/12) "Los conductores españoles desconocen más de la mitad de las señales de tráfico"

Datos (no están en el artículo): Se hizo un test con 4 opciones para las siguientes señales y el porcentaje de aciertos fue

67.6 %	98.7 %	59.9 %	53.1 %	13.5 %	18.6 %	40.4 %	68.4 %

Hechos: El porcentaje supera el 50.0 % (!!). Algunas señales son poco comunes. Había varias veces opciones muy próximas (calzada con dos carriles 31.1 %, Peligro: circulación en ambos sentidos 67.6 %).

Si me muestran 8 palabras en español de las que desconozco el significado exacto ¿no sé ni palabra de español?

¿perder+perder=ganar?

Para clasificar a los jugadores de ajedrez, se usa el sistema de puntuación Elo, que asigna a cada ajedrecista un número relacionado con la probabilidad que tiene de ganar.

Si el jugador A es mejor que el B y el jugador B es mejor que el C, claramente el jugador A es mejor que el C.

Ciertamente, C podría ganar a A por suerte. Lo que significa lo anterior es que si juegan muchas veces, A ganará más veces.

Curiosamente hay juegos de azar, recogidos para bajo el nombre genérico de **paradoja de Parrondo** que en cierto modo no son transitivos. Concretamente, dos juegos J_1 y J_2 tales que en ambos se juega contra la banca (contra alguien con más oportunidades de ganar) pero en los que es posible conseguir una ganancia jugándolos alternativamente.

Curiosamente hay juegos de azar, recogidos para bajo el nombre genérico de **paradoja de Parrondo** que en cierto modo no son transitivos. Concretamente, dos juegos J_1 y J_2 tales que en ambos se juega contra la banca (contra alguien con más oportunidades de ganar) pero en los que es posible conseguir una ganancia jugándolos alternativamente.

Consideramos tres monedas cargadas, con las siguientes probabilidades de salir cara

	Moneda 1	Moneda 2	Moneda 3
Probabilidad	0.495	0.095	0.745

En cualquiera de los dos juegos, si nos sale cara ganamos un euro y si nos sale cruz, perdemos un euro.

Moneda	1	2	3
			
Probabilidad	49.5 %	9.5 %	74.5 %

Primer juego J_1

Tirar la moneda 1.

Segundo juego J_2

Tirar la moneda 2 si el dinero que tengo es múltiplo de tres y la moneda 3 si no es múltiplo de tres.

Claramente J_1 es desfavorable porque si lo jugamos muchas veces seguidas sólo ganamos el 49.5 % de ellas.

Moneda	1	2	3
			
Probabilidad	49.5 %	9.5 %	74.5 %

Segundo juego J_2

Tirar la moneda 2 si el dinero que tengo es múltiplo de tres y la moneda 3 si no es múltiplo de tres.

Es más difícil ver que jugar sólo a J_2 también lo es. Con cálculos matemáticos se puede probar que la moneda 2 se usa algo más de la tercera parte de las veces, concretamente el 38.4 % y la moneda 3, el 61.6 %. Usar tanto la segunda moneda es malo y lleva a que las probabilidades de ganar son

$$38{,}4 \cdot 0{,}095 + 61{,}6 \cdot 0{,}745 = 49{,}56\,\%.$$

Jugando $J_1J_1J_1J_1\ldots\ldots$ o $J_2J_2J_2J_2\ldots\ldots$ acabaremos arruinándonos (un poco más rápido con el primer juego).

Sin embargo se puede probar que $J_1J_1J_2J_2J_1J_1J_2J_2\ldots$, es decir, alternar dos partidas con el primer juego con dos partidas con el segundo (o incluso jugar al azar a uno o a otro) es una estrategia que permite conseguir una ganancia a partir de estos dos juegos perdedores.

Jugando $J_1J_1J_1J_1\ldots\ldots$ o $J_2J_2J_2J_2\ldots\ldots$ acabaremos arruinándonos (un poco más rápido con el primer juego).

Sin embargo se puede probar que $J_1J_1J_2J_2J_1J_1J_2J_2\ldots$, es decir, alternar dos partidas con el primer juego con dos partidas con el segundo (o incluso jugar al azar a uno o a otro) es una estrategia que permite conseguir una ganancia a partir de estos dos juegos perdedores.

La explicación de esta paradoja, se basa en que ambos juegos no son independientes: están conectados a través del cambio en la cantidad de dinero.

¿Te atreverías a jugar?

Consideremos un juego de azar en que se nos da la posibilidad de ganar un premio o no ganar nada y por consiguiente se nos pide una cantidad determinada por participar.

Por ejemplo, en la lotería cada décimo tiene un mismo precio que se ajusta de manera que el dinero que se haya recaudado sea mayor que el dinero a repartir en premios.

¿Te atreverías a jugar?

Consideremos un juego de azar en que se nos da la posibilidad de ganar un premio o no ganar nada y por consiguiente se nos pide una cantidad determinada por participar.

Por ejemplo, en la lotería cada décimo tiene un mismo precio que se ajusta de manera que el dinero que se haya recaudado sea mayor que el dinero a repartir en premios.

En un juego de cara o cruz a una tirada, si prometo un euro por sacar cara debo pedir más de un euro por participar si quiero obtener ganancias cuando haya muchos jugadores.

Consideremos un juego de cara o cruz extraño que termina y perdemos cuando salga cruz y nos da 1€ por la primera cara, 2€ por la segunda, 4€ por la tercera, 8€ por la cuarta y así sucesivamente, cada vez duplicando el premio anterior.

Consideremos un juego de cara o cruz extraño que termina y perdemos cuando salga cruz y nos da 1€ por la primera cara, 2€ por la segunda, 4€ por la tercera, 8€ por la cuarta y así sucesivamente, cada vez duplicando el premio anterior.

En resumen, no recibimos nada si sale cruz y en otro caso recibimos $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ euros donde n es el número de caras seguidas.

$\longrightarrow 0€$

$\longrightarrow 1 + 2 + 4 = 7€$

$\longrightarrow 1€$

¿Cuánto dinero habría que pedir a los jugadores de este juego por participar? o dicho de otra forma, ¿cuánto deberíamos estar dispuestos a pagar por participar en este juego?

La **paradoja de San Petersburgo** consiste en que la cantidad a pagar para que el juego sea justo es infinita, por tanto nos deberíamos atrever a jugar fuera cual fuera el precio que nos exigiesen.

¿Cuánto dinero habría que pedir a los jugadores de este juego por participar? o dicho de otra forma, ¿cuánto deberíamos estar dispuestos a pagar por participar en este juego?

La **paradoja de San Petersburgo** consiste en que la cantidad a pagar para que el juego sea justo es infinita, por tanto nos deberíamos atrever a jugar fuera cual fuera el precio que nos exigiesen.

Digamos que juegan N personas, típicamente se pagará 1€ a $N/2$ de ellos y 2€ a $N/4$ por haber sacado dos caras. Como hay más de $N/2 + 2 \cdot N/4 = N$ euros en premios, es ventajoso pagar 1€ por participar.

Por otro lado, típicamente $N/8$ personas cobrarán 4€ y $N/16$ cobrarán 8€, entonces la cantidad típica repartida en premios es mayor que

$$1 \cdot \frac{N}{2} + 2 \cdot \frac{N}{4} + 4 \cdot \frac{N}{8} + 8 \cdot \frac{N}{16} = 2N.$$

Así pues, también es ventajoso pagar 2€ por participar.

Matemáticamente, al considerar el análisis de k tiradas, a partir de

$$1 \cdot \frac{N}{2} + 2 \cdot \frac{N}{4} + 4 \cdot \frac{N}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{N}{2^k} = \frac{k}{2} N$$

se deduce que también es ventajoso pagar $k/2$ euros por participar, sea lo grande que sea k.

Esta paradoja, creada por el matemático N. Bernoulli en 1713, ha llamado la atención de los economistas modernos.

Está claro que casi nadie apostaría la mitad de sus ahorros en este juego a no ser que estuviera desesperado. La manera de cuadrar los cálculos con el comportamiento real de las personas es introducir "funciones de utilidad" que tienen en cuenta que la mayor parte de las personas no arriesgan una parte sustancial de su patrimonio pero continuamente, como en la lotería, arriesgan una cantidad marginal si ven oportunidades remotas de premios sustanciosos.

Esta paradoja, creada por el matemático N. Bernoulli en 1713, ha llamado la atención de los economistas modernos.

Está claro que casi nadie apostaría la mitad de sus ahorros en este juego a no ser que estuviera desesperado. La manera de cuadrar los cálculos con el comportamiento real de las personas es introducir "funciones de utilidad" que tienen en cuenta que la mayor parte de las personas no arriesgan una parte sustancial de su patrimonio pero continuamente, como en la lotería, arriesgan una cantidad marginal si ven oportunidades remotas de premios sustanciosos.

Casi nadie entraría en un juego de cara o cruz en que pido 1€ si gano y pago 0,75€ si pierdo. Sin embargo la participación en loterías muchísimo más desventajosas es masiva. Es un hecho psicológico que los grandes premios y la publicidad llaman a los jugadores.

Paseos aleatorios y por Copenhague

Un **paseo aleatorio** es genéricamente un modelo matemático para reflejar situaciones físicas en que se toman caminos al azar.

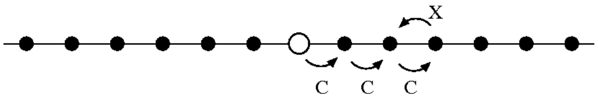
Ya el caso de una dimensión tiene una riqueza notable.

Paseos aleatorios y por Copenhague

Un **paseo aleatorio** es genéricamente un modelo matemático para reflejar situaciones físicas en que se toman caminos al azar.

Ya el caso de una dimensión tiene una riqueza notable.

Supongamos que estamos en una recta horizontal, tiramos una moneda y damos un paso a la derecha si sale cara y uno a izquierda si sale cruz. Al cabo de n pasos estaremos a cierta distancia d_n del punto de partida.



Tras n tiradas podemos estar a distancia como mucho $d_n = n$ y puede también que, por casualidad, el número de caras y cruces se haya compensado y estemos en el punto de partida $d_n = 0$.

Tras n tiradas podemos estar a distancia como mucho $d_n = n$ y puede también que, por casualidad, el número de caras y cruces se haya compensado y estemos en el punto de partida $d_n = 0$.

Un análisis matemático cuidadoso dice que cuando n es muy grande, el valor medio de la distancia, $\overline{d_n}$ dividido entre $\sqrt{n}$ tiende a $\sqrt{2/\pi}$.

Como en tantas otras ocasiones, aquí hay una invitación al platonismo: los seres humanos introdujimos hace muchos siglos el número π en relación con los círculos pero resulta que estaba misteriosamente también ahí, en los paseos aleatorios. Parece que hemos descubierto una verdad matemática preexistente.

En dos dimensiones podríamos decidir entre norte, sur, este y oeste tirando un dado y repitiendo la tirada si aparece un 5 o un 6. En general, en un hipotético mundo de k dimensiones hay k "ejes de coordenadas" cada uno con dos sentidos, por tanto $2k$ posibilidades.

Una pregunta natural es si los paseos aleatorios típicamente vuelven al punto de partida. La respuesta es bastante curiosa:

En dos dimensiones podríamos decidir entre norte, sur, este y oeste tirando un dado y repitiendo la tirada si aparece un 5 o un 6. En general, en un hipotético mundo de k dimensiones hay k "ejes de coordenadas" cada uno con dos sentidos, por tanto $2k$ posibilidades.

Una pregunta natural es si los paseos aleatorios típicamente vuelven al punto de partida. La respuesta es bastante curiosa:

- En una o dos dimensiones se vuelve al origen infinitas veces con probabilidad del 100 %.

En dos dimensiones podríamos decidir entre norte, sur, este y oeste tirando un dado y repitiendo la tirada si aparece un 5 o un 6. En general, en un hipotético mundo de k dimensiones hay k "ejes de coordenadas" cada uno con dos sentidos, por tanto $2k$ posibilidades.

Una pregunta natural es si los paseos aleatorios típicamente vuelven al punto de partida. La respuesta es bastante curiosa:

- En una o dos dimensiones se vuelve al origen infinitas veces con probabilidad del 100 %.
- En tres o más dimensiones, con probabilidad del 100 % se tiene que d_n tiende a infinito.

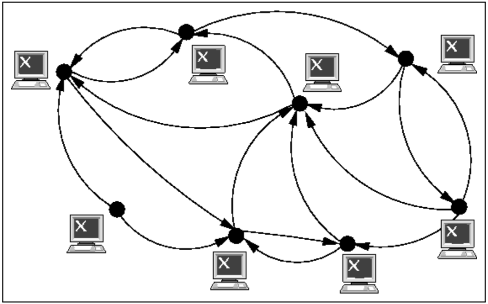
En dos dimensiones podríamos decidir entre norte, sur, este y oeste tirando un dado y repitiendo la tirada si aparece un 5 o un 6. En general, en un hipotético mundo de k dimensiones hay k "ejes de coordenadas" cada uno con dos sentidos, por tanto $2k$ posibilidades.

Una pregunta natural es si los paseos aleatorios típicamente vuelven al punto de partida. La respuesta es bastante curiosa:

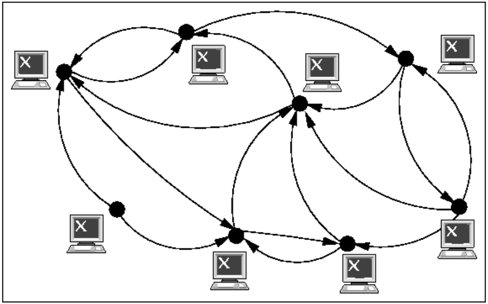
- En una o dos dimensiones se vuelve al origen infinitas veces con probabilidad del 100 %.
- En tres o más dimensiones, con probabilidad del 100 % se tiene que d_n tiende a infinito.

El estudio de los paseos aleatorios en diferentes variantes es importantísimo en muchas áreas fuera de las Matemáticas (Física, Economía, Informática, Biología, ...)

Si en un montón de nodos conectados por enlaces dejamos 2000 millones de personas que eligen caminos al azar, ¿dónde se concentrarán preferentemente?



Si en un montón de nodos conectados por enlaces dejamos 2000 millones de personas que eligen caminos al azar, ¿dónde se concentrarán preferentemente?



Éste es esencialmente el método con el que funciona el algoritmo que ordena los resultados en el buscador de Google (Page Rank Algorithm).

La física cuántica considera que los **estados** son funciones matemáticas y que los **observables** son operadores entre ellos. De esta forma, cosas tan básicas como la posición o el momento no son números concretos sino ciertas maneras de transformar funciones que a pueden representar partículas o sistemas.

La física cuántica considera que los **estados** son funciones matemáticas y que los **observables** son operadores entre ellos. De esta forma, cosas tan básicas como la posición o el momento no son números concretos sino ciertas maneras de transformar funciones que a pueden representar partículas o sistemas.

Una partícula libre se representa por una **función de onda** ψ que indica el estado físico. El momento lineal (en la física clásica la masa por la velocidad) en física cuántica es algo tan raro como la operación

$$\psi \longmapsto -\hbar\sqrt{-1}\,\nabla\psi \quad \text{con } \hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34} \quad \text{y} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Por otro lado, cuando utilizamos instrumentos para hacer mediciones físicas, obtenemos números. ¿Qué representan esos números?

Según la **interpretación de Copenhague**, hay que entenderlos en sentido probabilístico como promedios.

En cada punto, la función de onda de un electrón está relacionada con la probabilidad de que lo detectemos en dicho punto.

Por otro lado, cuando utilizamos instrumentos para hacer mediciones físicas, obtenemos números. ¿Qué representan esos números?

Según la **interpretación de Copenhague**, hay que entenderlos en sentido probabilístico como promedios.

En cada punto, la función de onda de un electrón está relacionada con la probabilidad de que lo detectemos en dicho punto.

Un electrón libre nos parece que viaja en línea recta porque es muy probable que si lo detectamos en dos puntos, también lo detectemos en un tercero alineado, pero con instrumentos muy precisos se comprueba que, según las mediciones, las trayectorias son “borrosas”, con una componente aleatoria.

Presentación y código fuente disponibles en

`http://www.uam.es/fernando.chamizo`