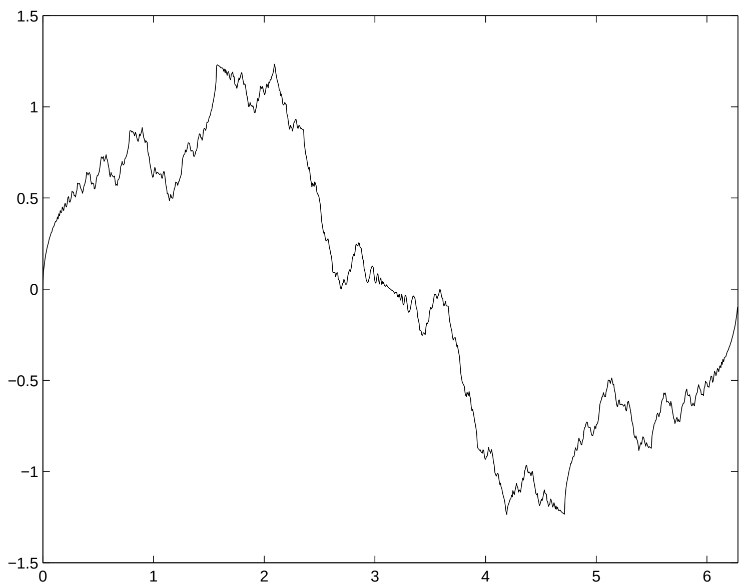
Algunas series de Fourier fractales

Fernando Chamizo

Abril 2002

$$\text{La función de Riemann : } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$$



Según Weierstrass (1872), Riemann afirmó en 1861 que f no es diferenciable en ningún punto.

<u>Dem. falsa, solución falsa</u>

$f'(x) \overset{(?)}{=} \sum \cos(n^2 x)$ no converge para ningún $x \in \mathbb{R} \overset{(?)}{\Rightarrow}$ no es derivable en ningún punto

Riemann tenía razón (?)

<u>Dem. falsa, sol. correcta</u>

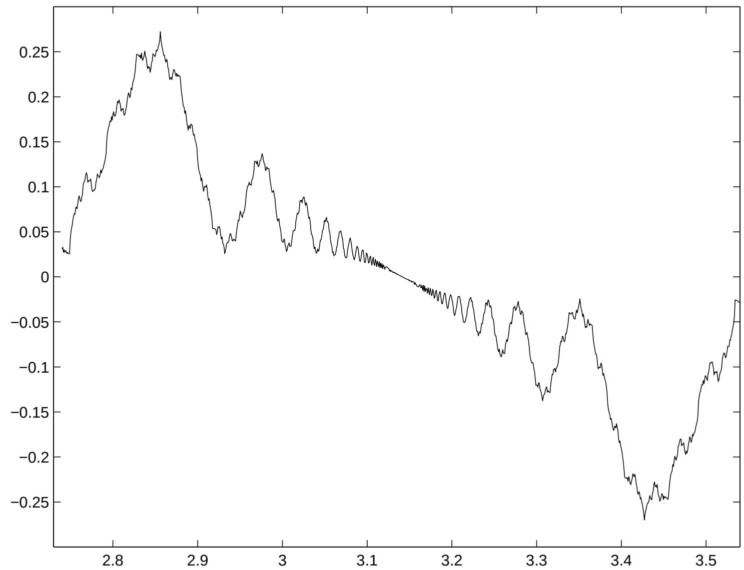
$f'(x) \overset{(?)}{=}$ derivada de

$$\lim_{y\to 0} \Big(\sum e^{-n^2 y} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \Big)$$

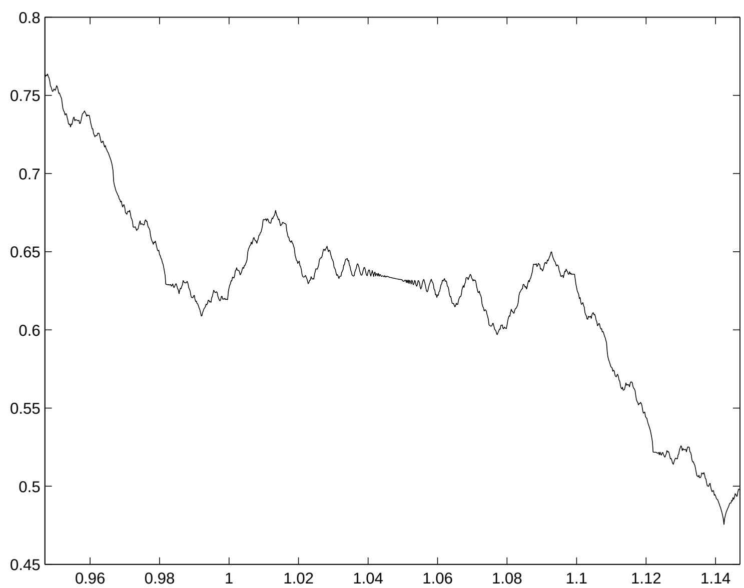
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\theta(\frac{x}{2\pi} + iy) - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

si $x = a\pi/b$, a y b impares.

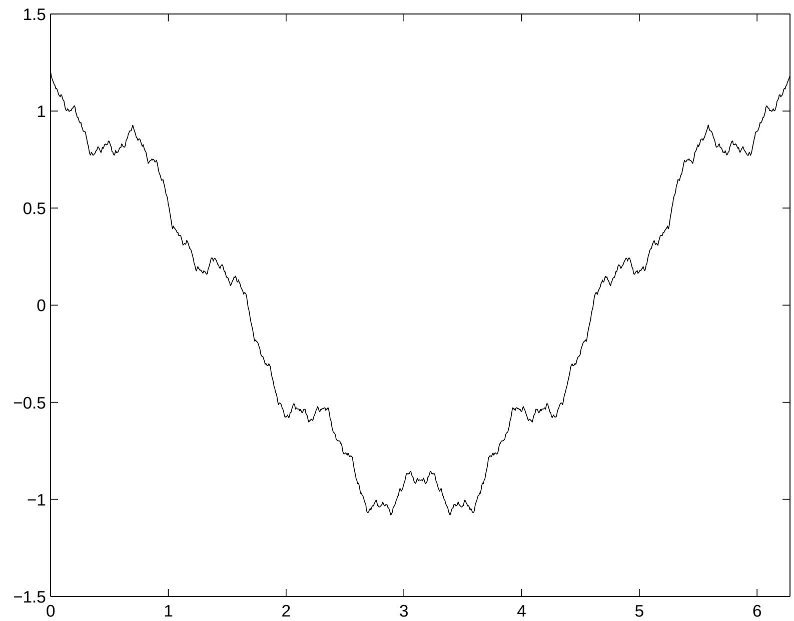
Diferenciabilidad en $x = \pi$



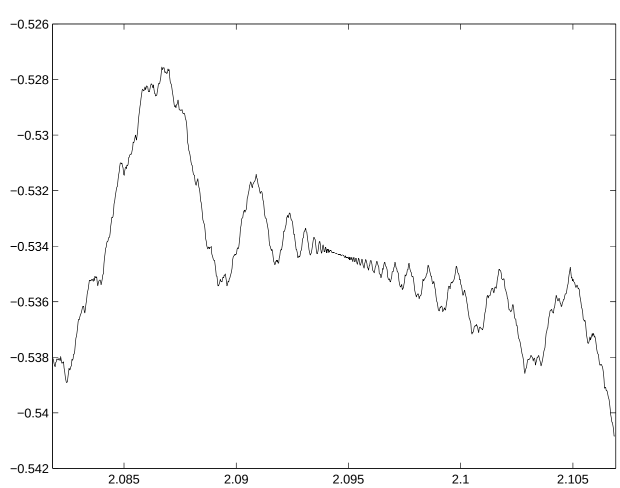
Diferenciabilidad en $x = \pi/3$

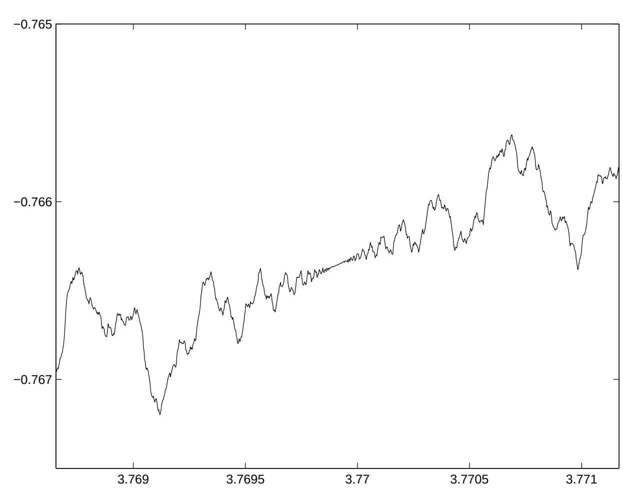


$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3 x)}{n^3}$$



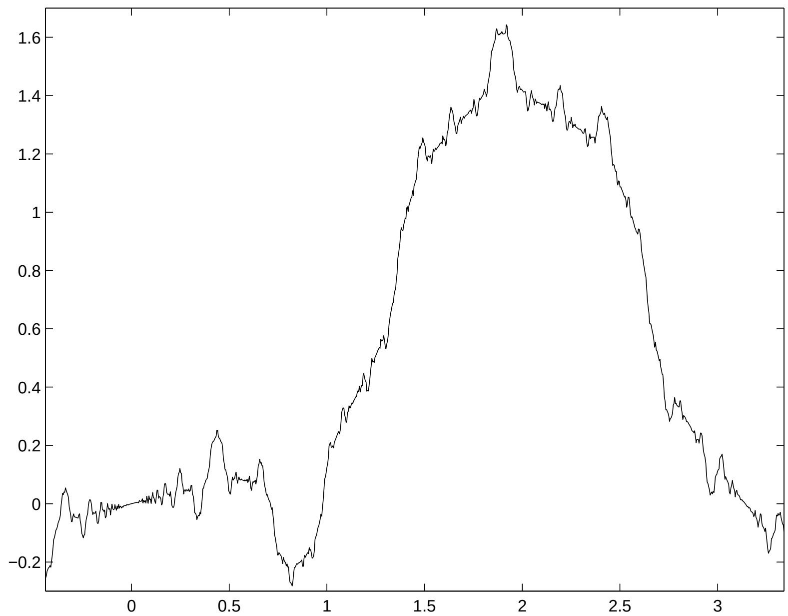
Cerca de $x = 2\pi/3$ Muy cerca de $x = 6\pi/5$



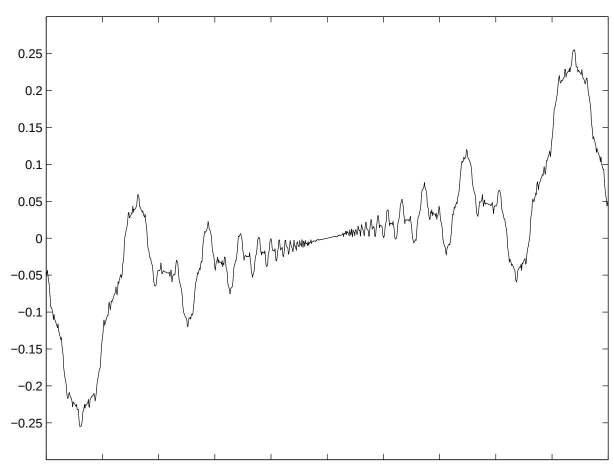


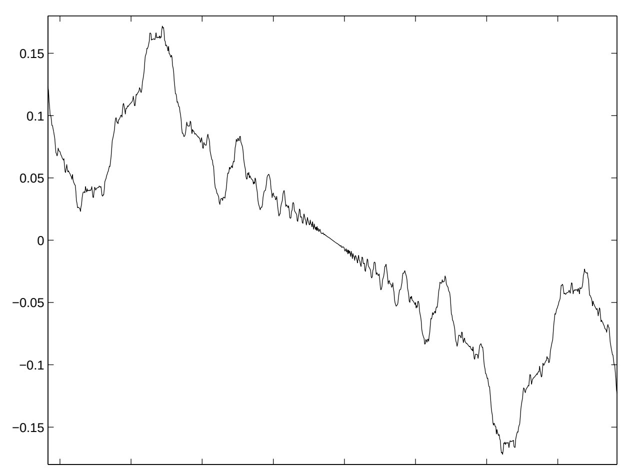
$$f(x) = \sum \frac{a_n}{n^{7/4}} \sin(nx) \text{ con } a_n \text{ los coeficientes}$$

de la función L de Hasse-Weil de la curva elíptica más sencilla (conductor mínimo $N = 11$).



Cerca de $x = 0$ Cerca de $x = \pi$





Comportamiento global

$$F_{\alpha,k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\alpha} e^{2\pi i n^k x}, \qquad 0 < C_1 < c_n < C_2$$

$$\alpha \le 1 \;\Rightarrow\; F_{\alpha,k} \notin L^\infty, \qquad \alpha > k + \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; F_{\alpha,k} \in H^1$$

En el rango intermedio se obtienen fractales.

Frecuencias n^k $\Rightarrow$ Comportamiento caótico

Teorema.

$\Gamma_{\alpha,k}$ = gráfica en $[0,1]$ de Re $F_{\alpha,k}$ ó Im $F_{\alpha,k}$

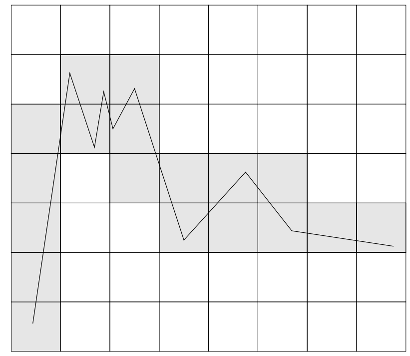
$$\dim \Gamma_{\alpha,2} = \max\big(1, \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}\big) \quad \text{para } \alpha > 1.$$

$$\dim \Gamma_{\alpha,k} = \max\big(1, 2 + \frac{1}{2k} - \frac{\alpha}{k}\big) \quad \text{para } \alpha > \frac{k+1}{2}.$$

Ej. La función de Riemann es fractal de dimensión $5/4$.

Esquema de la demostración:

$g = \operatorname{Re} F_{\alpha,k},\ \operatorname{Im} F_{\alpha,k}$



$\dim = -\frac{\log \mathcal{N}}{\log \Delta x} = 1 - \frac{\log \sum |\Delta g|}{\log \Delta x}$

Límite superior: Desigualdad de gran criba $\longrightarrow$ Una suma trigonométrica no puede ser muy grande a la vez en muchos puntos bien espaciados.

$$\sum_{\nu} \Big| \sum_{n \le N} a_n e^{2\pi i n x_\nu} \Big|^2 \le (N + \delta^{-1}) \sum_{n \le N} |a_n|^2$$

con $x_\nu \in \mathbb{T}, \quad d(x_\nu, x_\mu) > \delta$, $\nu \ne \mu$.

$\Rightarrow$ Se pueden acotar los incrementos de g en media.

Límite inferior:

$$\mathcal{N} \ge (\Delta x)^{-2} \int |g(t + \Delta x) - g(t)|\, dt$$

Hölder $\to \|f\|_1 \ge \|f\|_2^3 / \|f\|_4^2$

$\#\{n^k + m^k = N\} = O(N^\epsilon) \to \|f\|_4 \asymp N^\epsilon \|f\|_2$

Comportamiento local

$$f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} e^{2\pi i n^k x}, \quad F_{\alpha,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\alpha} e^{2\pi i n^k x} \quad c_n \uparrow, \downarrow$$

Teorema. f_k derivable en $x = a/q$ (irred.) $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{q} e^{2\pi i n^k/q} = 0$.

Si q es libre de cuadrados esto ocurre $\Leftrightarrow$ $\exists$ p primo tal que $p|q$ y $\mathrm{mcd}(k, p-1) = 1$.

Ej. La función de Riemann es derivable en los puntos $x = 2\pi a/q$ con $2|q$, $2^2 \not| q$, $2 \not| a$, i.e. en $x = \pi a/b$ con a y b impares.

Teorema. Si $x = \lim a_n/q_n$ con $|x - \frac{a_n}{q_n}| < \frac{1}{2q_n^2}$, $q_{n+1}/q_n < C$, entonces $F_{\alpha,k} \in \Lambda_\beta(x)$ para todo

$$\beta < \frac{\alpha - 1}{k} + \max\left(\frac{1}{k2^{k-1}}, \frac{C'}{k^3 \log k}\right).$$

Esquema de la demostración:

<u>Sumas trigonométricas</u>

Si $x = a/q$ con q pequeño

$$\sum_{n\le N} e^{2\pi i n^k x} \approx \frac{N}{q}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^k a/q}$$

Denom. pequeño $\Rightarrow$ No hay cancelación.

Poisson $\rightarrow$ $|x - a/q| < C/(qN^{k-1})$ puede tratarse como una perturbación.

Si x está cerca de a/q, $|x-a/q| < 1/q^2$, se tiene la *desigualdad de Weyl*

$$\Big|\sum_{n\le N} e^{2\pi i n^k x}\Big| < C\Big(\frac{N}{q^{1/K}} + N^{1-1/K} + N^{1-k/K} q^{1/K}\Big) N^{\epsilon}$$

con $K = 2^{k-1}$. Denom. grande $\Rightarrow$ Hay cancelación.

Método del círculo $\rightarrow$ aproximar en los "arcos mayores", estimar en los "arcos menores".

¿Cómo aparecen las curvas elípticas?

$$\zeta(s) = \sum n^{-s}$$

Poisson $\Rightarrow$ Relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$

$$\theta(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}, \quad \theta(1/x) = x^{1/2}\theta(x) \quad \text{(modular)}$$

$$2\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\big(\theta(x)-1\big)\,dx$$

Rel. modular $\Rightarrow$ Ec. funcional

En general:

Forma automorfa $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$

$\downarrow$

Ecuación funcional para $\sum a_n n^{-s}$

$\downarrow$

Fórmula de sumación

$$\sum \frac{a_n}{n^\alpha} e^{2\pi i n z} = \text{integral fraccionaria de } f$$

Shimura-Taniyama-Weil:

Curvas elípticas $\to$ formas automorfas

Teorema. Sea $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$ una forma automorfa de peso $r > 0$ con respecto a Γ y sean

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} e^{2\pi i n x}, \quad A_\alpha=\mathrm{Re}\, f_\alpha, \quad B_\alpha=\mathrm{Im}\, f_\alpha$$

a) Es posible caracterizar en algunos rangos los espacios funcionales (de Sobolev o Lipschitz) a los cuales pertenece f_α.

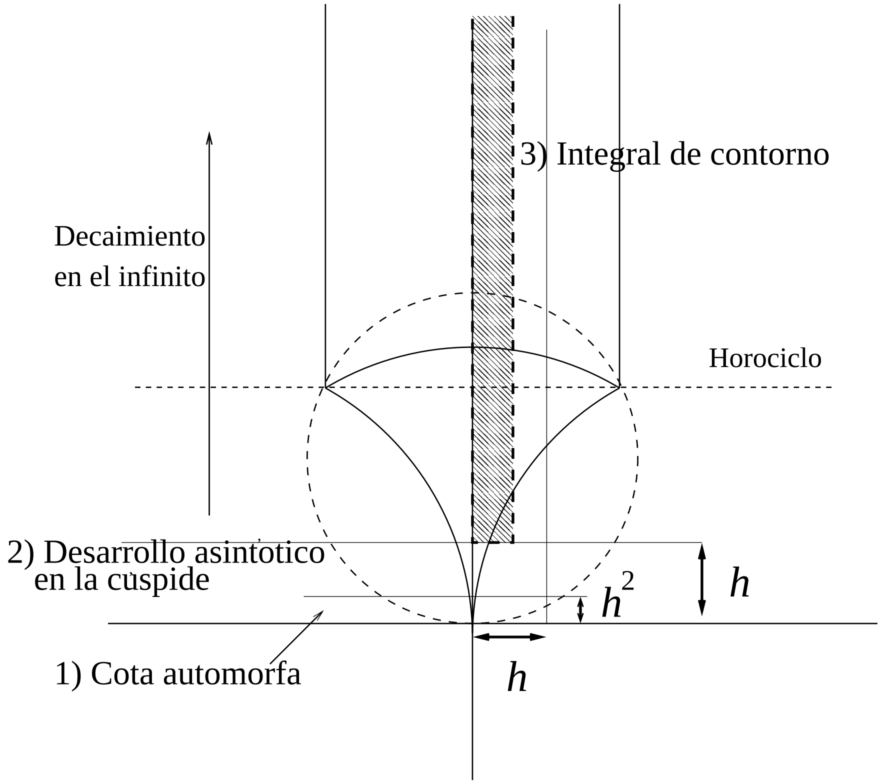
b) Para $\frac{r+1}{2} < \alpha < \frac{r}{2} + 1$

$$A_\alpha \text{ es diferenciable en } x_0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ es cuspidal en } x_0$$

$$B_\alpha \text{ es diferenciable en } x_0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ es cuspidal en } x_0$$

c) Las gráficas de A_α and B_α son habitualmente fractales. Por ejemplo, si f es una forma cuspidal

$$\dim = \max\left(1, 2 - \alpha + \frac{r}{2}\right).$$



$$f_\alpha(h) - f_\alpha(0) = \frac{(2\pi)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}\big(f(h+it) - f(it)\big)dt$$

1) f forma cuspidal $\Rightarrow$ $|\mathrm{Im}\ z|^{r/2}|f(z)|$ acotada. En general $|f(h+it)| \ll h^r t^{-r} + h^{-r}$.

2) $f(z) \sim C_1 z^{-r} e(-C_2/z)$

3) $f(h+it) - f(it) = hf'(\xi + it)$ y mover la línea de integración.

Ej. $$\sum_{n\equiv\pm1\ (12)} \frac{\mathrm{sen}(2\pi n^2 x)}{n^2} - \sum_{n\equiv\pm5\ (12)} \frac{\mathrm{sen}(2\pi n^2 x)}{n^2}$$

no diferenciable en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f'(a/q) = 0$, $\forall a/q \in \mathbb{Q}$.