Fernando Chamizo
25 de marzo de 2015 de 12:00 a 13:30

Taller de problemas 4º de la ESO + empresa

El propósito de esta actividad es resolver colectivamente algunos problemas matemáticos. Se espera la participación de los asistentes. Dependiendo de cómo se desarrolle, completaremos uno, dos o tres de los siguientes objetivos:

1. ¿Cuánto se puede separar de la vertical una pila de libros sin caerse?

El resultado seguro que sorprenderá e intentaremos hacer alguna demostración práctica. ¿Cuánto se podrá separar el libro superior de la base?

2. ¿De dónde sale la curiosa relación entre el número de vértices, aristas y caras en los poliedros?

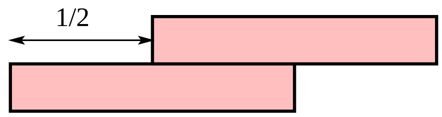
La fórmula es clásica y bastante conocida. Investigaremos por qué se cumple siempre, ¿o casi siempre?

3. ¿Cuándo un cuadrado y el doble de un cuadrado difieren en uno?

Éste es uno de esos típicos problemas de teoría de números con un enunciado simple pero nada fácil de resolver. ¿Cuántas pistas necesitaremos para llegar a la solución?

1. Equilibrios imposibles

Si tenemos dos libros que miden uno, ¿qué anchura máxima pueden abarcar al apilarse? Muy fácil, está claro que podemos desplazar el segundo libro sobre el primero, así que la anchura máxima es $1 + 1/2 = 3/2$, es decir, $1/2$ más allá de la vertical.

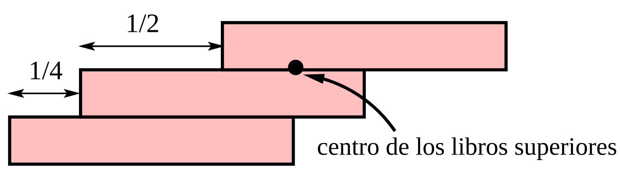


La cosa se complica si estudiamos el mismo problema con tres libros.

¿Por qué anchura máxima apostaríamos si disponemos de tantos libros como deseemos?

Parece claro que la desviación sobre la vertical debe ser menor que 1 porque en otro caso el libro superior no estaría sostenido por el inferior. Parece claro, ¿pero es verdad?

Las leyes del equilibrio son en esencia sencillas, aunque formularlas de manera precisa requeriría haber seguido antes un curso de Física. Esencialmente lo que dicen es que algo no se cae siempre que el *centro* esté sobre la base de sustentación. Por ello en el caso de dos libros no es posible desplazar el libro superior más de $1/2$. Una vez asimilada esta idea, podemos resolver el problema de los tres libros. La parte común de los dos libros superiores mide $1/2$ y la base de sustentación debe llegar al menos hasta el punto medio, entonces se puede separar a lo más $1/4$ del libro intermedio[1].



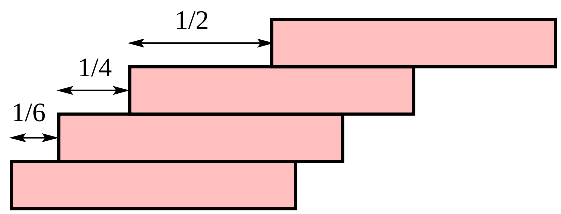
El problema con cuatro libros es más complicado porque para saber dónde poner un libro como base necesitamos calcular el centro de la torre anterior que no es simétrica. ¿Cómo calcularlo?

El centro de los dos libros de arriba está justo sobre el borde derecho (por estar en equilibrio) es decir, dista 1 del borde izquierdo, mientras que el centro del libro de abajo dista $1/2$. Como los dos de arriba pesan el doble, el primer centro debería contar el doble al hacer el promedio. De esta forma inferimos que el centro de los tres libros dista del borde izquierdo

$$c_3 = \frac{1 + 1 + 1/2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Entonces un cuarto libro en la base lo podremos separar $1 - 5/6 = 1/6$ del borde izquierdo.

[1] **Actividad:** Competir para hacer la torre de tres libros más separada en 60 segundos.



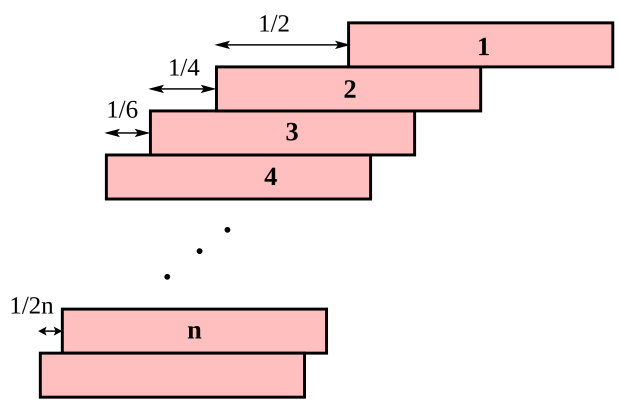
¿Y ahora cómo calcularíamos el centro de esta torre? Con la misma idea, el centro de los tres libros superiores dista 1 del borde izquierdo de la base para que esté en equilibrio y entonces el centro de todo el conjunto dista:

$$c_4 = \frac{1+1+1+1/2}{4} = \frac{7}{8}.$$

En general, el centro de la torre de n libros es

$$c_n = \frac{1 + \overset{n-1 \text{ veces}}{\cdots} + 1 + 1/2}{n} = \frac{n-1+1/2}{n} = 1 - \frac{1}{2n}$$

y podremos añadir un libro en la base separado del siguiente $1/2n$.



La conclusión de nuestras investigaciones es que la separación de la vertical de esta torre es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

¿Y cuánto puede valer esto como máximo? ¡No hay máximo! ¡Puede valer más que cualquier número! Para verlo, agrupamos la suma de la forma siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)}_{2 \text{ num.} \geq 1/8} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}\right)}_{4 \text{ num.} \geq 1/16} + \underbrace{\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{30} + \frac{1}{32}\right)}_{8 \text{ num.} \geq 1/32}.$$

Cada paréntesis es mayor que $1/4$, entonces supera cualquier número.

¿Dónde está el truco? En parte en que el crecimiento es lentísimo, necesitaríamos más de 1600 libros para separarnos 4 de la vertical, y en parte en las dificultades prácticas para construir torres muy perfectas.

De todos modos, en situaciones adecuadas con cinco libros sobre otro y paciencia, se puede conseguir que el superior rebase ligeramente el borde del inferior, en contra de nuestra intuición inicial. Lo cual se explica porque

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=1.1416\ldots>1.$$

2. Vértices, aristas y caras

Un poliedro es un cuerpo geométrico con caras planas. Hay cinco de ellos que son muy famosos, porque Platón, que era un gran filósofo, habló de ellos y porque son los únicos que tienen simetría total en algún sentido. Hagamos una tabla para el número de vértices, caras y aristas[2].

	Vértices	Caras	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

Al cabo de un rato de examinar la tabla llegaremos a la relación

$$\boxed{V+C=A+2}$$

donde V, C y A son el número de vértices, caras y aristas, respectivamente.

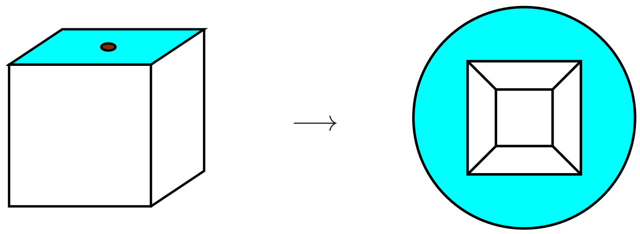
Si añadimos otros poliedros, la relación se cumple igualmente:

	Vértices	Caras	Aristas
Pirámide de Egipto	5	5	8
Balón de fútbol	60	32	90

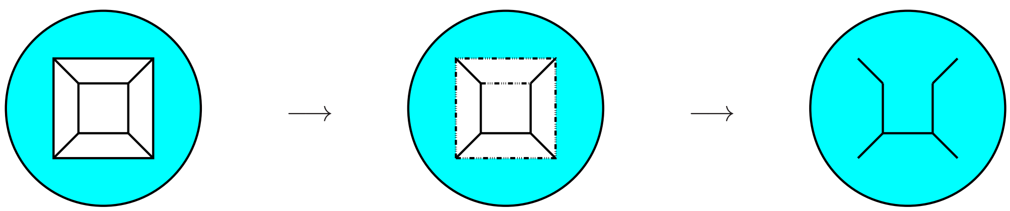
¿Por qué se cumple esta relación tan curiosa?

[2]**Actividad:** Contar vértices, caras y quizá aristas en un dodecaedro.

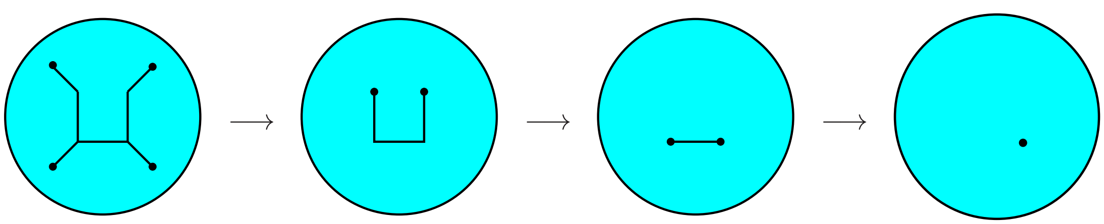
Pensemos que nuestro poliedro es de goma y que hacemos un agujero circular en una cara que hemos pintado de azul. Estirando el agujero hasta llegar a una superficie plana, se tendrá un mapa con fronteras dadas por las aristas y rodeado de un mar circular, la cara azul[3].



El mapa tendrá $C-1$ regiones y parece claro que las podemos inundar todas rompiendo $C-1$ fronteras porque hay que romper una frontera para inundar una región de la costa y después se puede repetir el procedimiento (En la sección de vídeos de `http://www.uam.es/otros/openmat/` hay uno que muestra experimentalmente el proceso).



En el "esqueleto resultante" están todos los vértices del poliedro original. Supongamos que vamos quitándolos suprimiendo siempre los que están en una sola frontera, que eliminamos también. Al final del proceso sólo restará un vértice, por tanto en nuestro esqueleto quedaban $V-1$ fronteras.



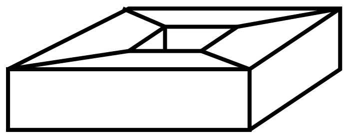
Resumiendo, las fronteras inicialmente eran A, hemos quitado $C-1$ para inundar todo y, según lo dicho, las que quedan son $V-1$. En una fórmula

$$A-(C-1)=V-1$$

que operando un poco, nos da el $V+C=A+2$ que buscábamos.

[3] **Actividad:** Dibujar el mapa para una pirámide de Egipto con el agujero en una cara lateral. Más difícil: mapa de un octaedro.

Hemos dado por supuesto que un poliedro de goma se puede aplanar siempre haciéndole un agujero. En rigor no es siempre así. Por ejemplo, no ocurre para un anillo o brazalete de caras planas.



$$V = 16,\ C = 16,\ A = 32$$

$$V + C = A$$

El resultado que hemos visto es cierto para todos los poliedros que al inflarlos den lugar a una pelota. En otro caso hay que cambiar el 2 por otro número.

3. Cuadrados perfectos y sus dobles

En Matemáticas hay problemas con enunciado ingenuo que prácticamente cualquiera puede entender pero que no son nada sencillos. Posiblemente los más llamativos son los que tratan de propiedades básicas de los números naturales.

Todos sabemos qué es el cuadrado de un número natural y sabemos restar y hallar el doble. La pregunta que nos planteamos es:

¿Cuándo un cuadrado y el doble de un cuadrado difieren en uno?

Digamos que los números son a y b, lo que buscamos es que satisfagan $2a^2 - b^2 = 1$ o $b^2 - 2a^2 = 1$. Despejando, hay que buscar los números a tales que $2a^2 + 1$ o $2a^2 - 1$ sea un cuadrado. Afortunadamente estamos en el siglo XXI y le podemos preguntar a nuestro amigo el ordenador para que nos haga una lista por ejemplo para $a < 1000$.

Hay muchas posibilidades dependiendo de lo que uno sepa programar. Aquí empleamos SAGE, que se puede usar en línea `http://www.sagemath.org/` y tiene unas capacidades matemáticas muy avanzadas. El programa se reduce a tres líneas:

```
for a in srange(1,1000):
    if (2*a^2+1).is_square() or (2*a^2-1).is_square():
        print a
```

y la lista que genera es[4]

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 12, \quad 29, \quad 70, \quad 169, \quad 408, \quad 985.$$

¿Qué tiene de especial esta sucesión? Recordemos los problemas de ingenio de "indica cuál es el siguiente números en esta serie" (los matemáticos diríamos *sucesión*). Por si todavía no está

[4] **Actividad:** ¿Cuál es la ley de formación? Mostrando los siete primeros términos, hallar el octavo.

claro, generemos ahora los valores de $a < 100000$ válidos. A pesar de la gran diferencia entre 1000 y 100000, sólo se añaden cinco nuevos términos.

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ 2378,\ 5741,\ 13860,\ 33461,\ 80782.$$

La lista de los valores de b válidos, se obtiene de la misma forma, con un programa similar al anterior:

```
for b in srange(1,20000,2):
    if ((b^2-1)/2).is_square() or ((b^2+1)/2).is_square():
        print b
```

El conjunto de soluciones a y b, con $a < 20000$ está recogido en esta tabla

a	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860
b	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	19601

¿Qué tienen de especial estas listas? Tras pensar un poco, la regla de formación tanto para a como para b es que cada número es el doble del último más el penúltimo. En la jerga de los matemáticas, eso se indica a menudo con

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Una vez especificados los dos primeros valores iniciales, esta regla de formación nos permite generar todos los elementos que queramos. Orgullosos de nuestro descubrimiento, lo enunciamos:

Teorema. *Los números naturales a y b tales que $2a^2 - b^2 = \pm 1$, se obtienen aplicando la fórmula $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ cierto número de veces, con $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ para a y $x_2 = 3$ para b.*

Con esto podemos conseguir números gigantescos que resuelven el problema sin apenas esfuerzo. Si nos auxiliamos de nuevo de nuestro amigo el ordenador e iteramos la fórmula 50 veces, lo cual no le lleva el más mínimo esfuerzo, resulta:

$$a = 28365513113449345692, \qquad b = 40114893348711941777$$

que difícilmente hubiéramos encontrado en una búsqueda directa, incluso con el ordenador (al que contar hasta números de 20 cifras le cuesta 3000 años, tirando por lo bajo).

En cierto modo el teorema responde a la pregunta inicial, porque nos da un método eficiente para hallar las soluciones. Sin embargo, alguien podría objetar que tenemos un método pero no una fórmula explícita. Un matemático además diría que tenemos una conjetura y no un teorema porque no lo hemos demostrado.

Independientemente de estas consideraciones, está claro que no hemos explicado por qué se tiene esa curiosa propiedad. De hecho observando durante un rato la tabla de a y b, seguro que se nos ocurren otras propiedades milagrosas que podemos enunciar ufanamente como teoremas sin llegar a entender de dónde salen.

Algunas de las propiedades más simples surgen[5] al examinar los bloques 2×2 de la tabla para a y b:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 7 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 12 \\ \hline 7 & 17 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 29 \\ \hline 17 & 41 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 29 & 70 \\ \hline 41 & 99 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 70 & 169 \\ \hline 99 & 239 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 169 & 408 \\ \hline 239 & 577 \\ \hline\end{array}$$

Parece que:

$$\text{El bloque} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \gamma \\ \hline \beta & \delta \\ \hline\end{array} \quad \text{siempre cumple} \quad \gamma = \alpha + \beta \quad \text{y} \quad \delta = 2\alpha + \beta.$$

Hay otras propiedades más complejas como $\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$ y $2\alpha\gamma - \beta\delta = \pm 1$ donde los signos $+$ y $-$ se van alternando. Más difícil de observar es que β/α se parece cada vez más a un número bien conocido:

$$\frac{3363}{2378} = \mathbf{1.4142136}248 \qquad \frac{8119}{5741} = \mathbf{1.4142135}516 \qquad \frac{19601}{13860} = \mathbf{1.41421356}42$$
$$\sqrt{2} = \mathbf{1.4142135}623 \qquad \sqrt{2} = \mathbf{1.4142135}623 \qquad \sqrt{2} = \mathbf{1.41421356}23$$

Esta propiedad, que parece la más complicada, es en realidad la más simple: Si a es grande

$$2a^2 - b^2 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{b^2}{a^2} \pm \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \text{número pequeño}.$$

Entonces b/a se parece mucho a $\sqrt{2}$, más cuanto mayor sea a.

Volvamos a las propiedades $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = 2\alpha + \beta$. Traduciéndolas a la notación original, nos dirían que si a y b son soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$, entonces $a + b$ y $2a + b$ también lo son. Eso es fácil de comprobar con un mínimo de álgebra:

$$2(a+b)^2 - (2a+b)^2 = 2a^2 + 4ab + 2b^2 - \left(4a^2 + 4ab + b^2\right) = \mp 1.$$

Ahora vamos con un toque de genialidad: las dos propiedades $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = 2\alpha + \beta$ se escriben como una sola mediante

$$\gamma\sqrt{2} + \delta = (\alpha\sqrt{2} + \beta)(\sqrt{2} + 1).$$

[5]**Actividad:** Tratar de inventar algunas propiedades.

Esto permite obtener una conclusión importante: Partiendo de la primera solución $a = 1$, $b = 1$, ¡se obtienen todas multiplicando sucesivamente por $\sqrt{2} + 1$!

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{2} + 3 &= (1\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^2 \\
5\sqrt{2} + 7 &= (2\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^2(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^3 \\
\cdots \quad & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
70\sqrt{2} + 99 &= (\sqrt{2} + 1)^6
\end{aligned}
$$

En general, la n-ésima solución cumplirá $a\sqrt{2} + b = (\sqrt{2} + 1)^n$. ¿Y cómo despejamos a y b? Fácil, escribiendo el conjugado $-a\sqrt{2} + b = (-\sqrt{2} + 1)^n$ y sumando y restando se sigue:

Teorema. *Los números naturales a y b tales que $2a^2 - b^2 = \pm 1$, vienen dados por las fórmulas*

$$
a = \frac{(\sqrt{2} + 1)^n - (-\sqrt{2} + 1)^n}{2\sqrt{2}}, \qquad b = \frac{(\sqrt{2} + 1)^n + (-\sqrt{2} + 1)^n}{2},
$$

donde $n = 0, 1, 2, 3,$ etc.

Con esto tenemos una fórmula explícita que nos sirve para probar, con tiempo y ganas, todas las propiedades, incluido el teorema anterior (que es más práctico para los cálculos).

En realidad, hay que confesar que las líneas anteriores dejan una laguna en cuanto a demostrar que *todas* las soluciones del problema original vienen dadas por las fórmulas del teorema, es decir, que no se olvidan de ninguna solución. Completar esta laguna es un buen reto matemático.