Taller de problemas 4º de la ESO + empresa

Fernando Chamizo Lorente
http://www.uam.es/fernando.chamizo

ICMAT 25 de marzo de 2015

Índice

Problema 1

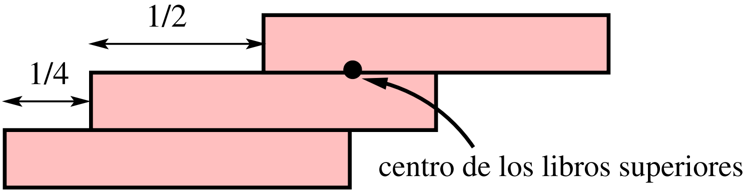
¿Cuánto se puede separar de la vertical una pila de libros?

¡Sin caerse!

La torre de dos libros

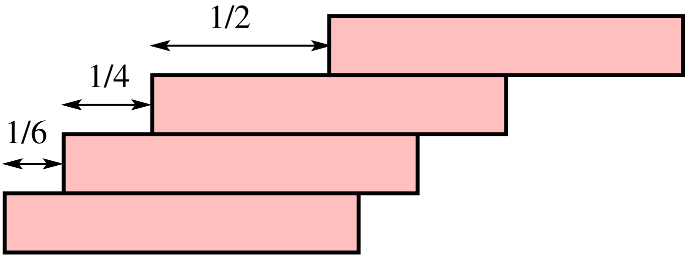
Posición límite de equilibrio

La torre de tres libros



Posición límite de equilibrio

La torre de cuatro libros



Posición límite de equilibrio

La torre general: n libros sobre otro

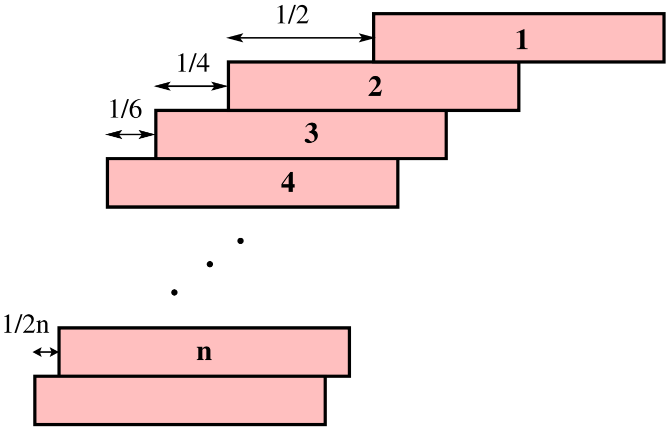


Foto real $n = 4$

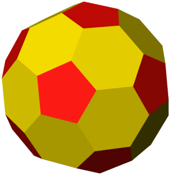
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 1.041\cdots > 1$$

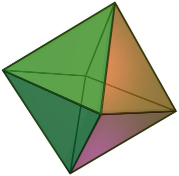
Foto real $n = 4$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 1.041 \cdots > 1$$

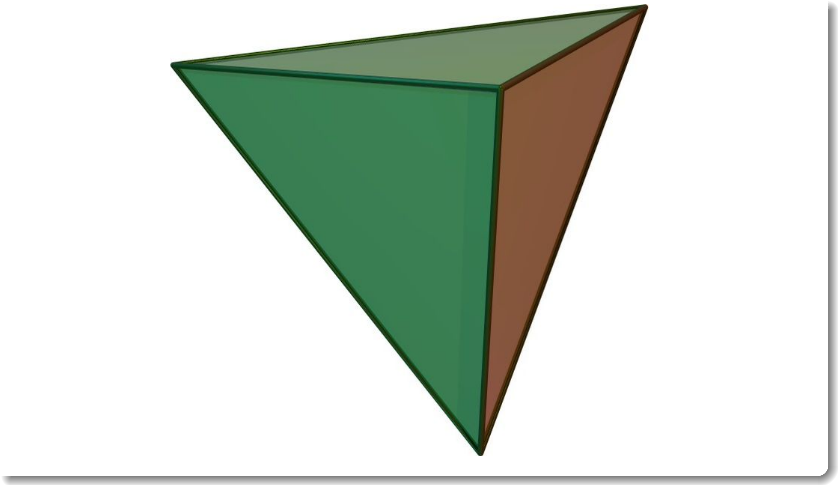
Problema 2

¿De dónde sale la relación entre el número de vértices, aristas y caras en los poliedros?

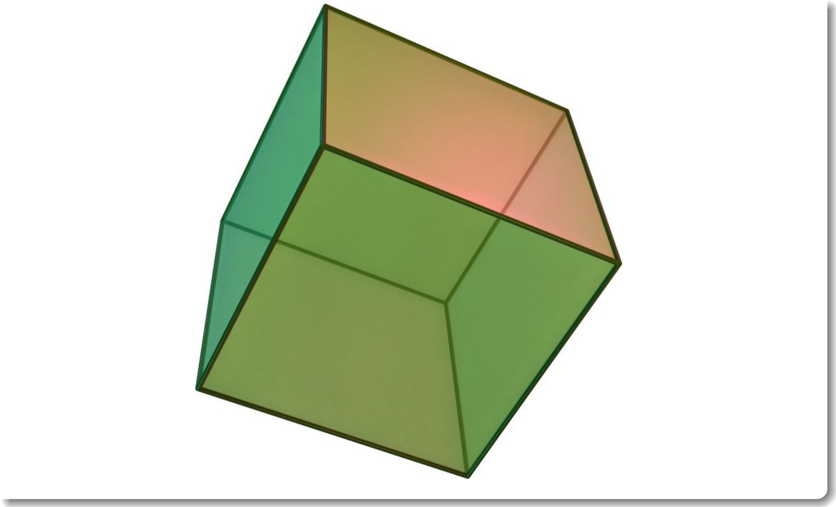




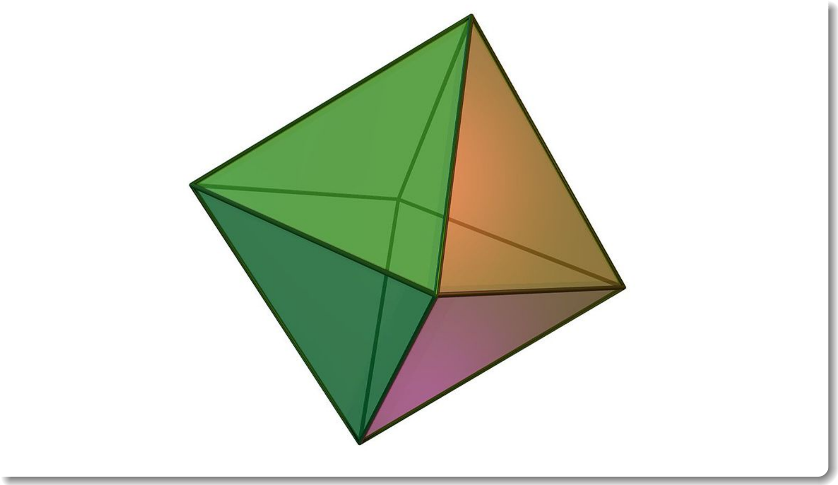
Tetraedro



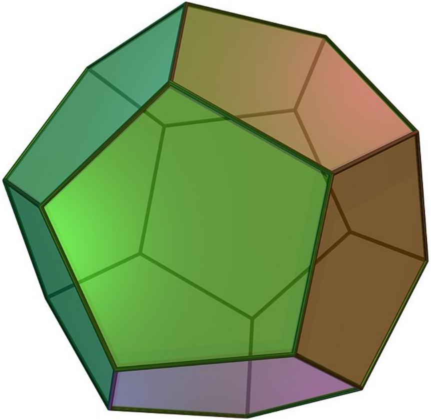
Cubo



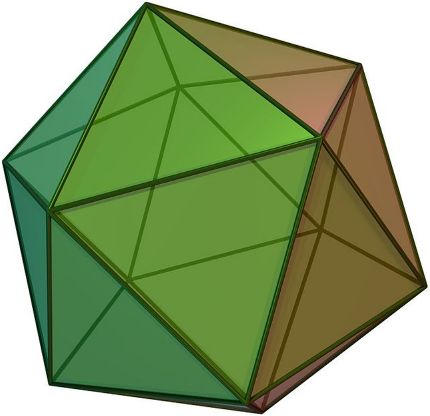
Cubo



Cubo



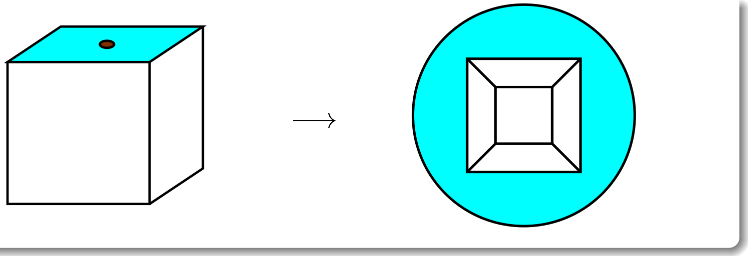
Cubo



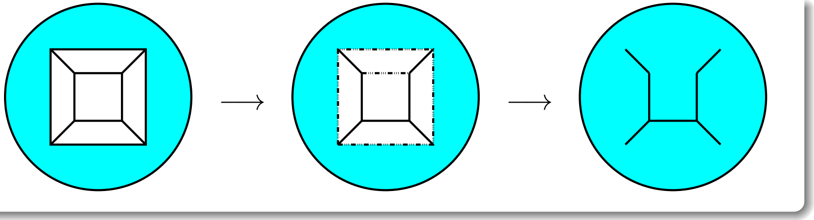
Tabla

	Vértices	Caras	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30
Pirámide de Egipto	5	5	8
Balón de fútbol	60	32	90

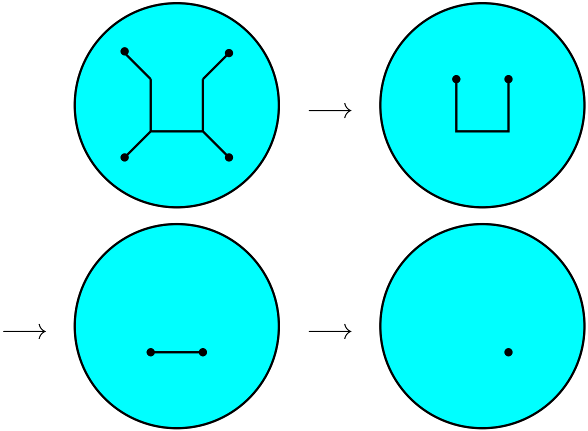
Aplanar



Inundar

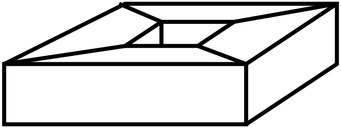


Quitar vértices



Se van suprimiendo los vértices exteriores y sus aristas

Un contraejemplo



$$V = 16, \ C = 16, \ A = 32$$

El fallo en la fórmula se debe a que hay un agujero

Problema 3

¿Cuándo un cuadrado y el doble de un cuadrado difieren en uno?

$$2 \cdot 2836551311344934569 2^2 - 4011489334871194177 7^2 = 1$$

$$2 \cdot 2836551311344934569 2^2 - 4011489334871194177 7^2 = 1$$

$$2 \cdot 2836551311344934569 2^2 - 4011489334871194177 7^2 = 1$$

Buscamos soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$

Valores de a

$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ 2378,\ 5741,\ 13860.$$

¿Qué regla de formación siguen?

Tabla de soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$

a	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
b	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119

Bloques:

1	2
1	3

2	5
3	7

5	12
7	17

12	29
17	41

29	70
41	99

Parece que el bloque

α	γ
β	δ

siempre cumple

Tabla de soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$

a	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
b	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119

Bloques:

1	2
1	3

2	5
3	7

5	12
7	17

12	29
17	41

29	70
41	99

Parece que el bloque

α	γ
β	δ

siempre cumple $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = 2\alpha + \beta$

Escribir con raíces

α	γ
β	δ

siempre cumple $\gamma = \alpha + \beta$ y $\delta = 2\alpha + \beta$

Las dos propiedades se escriben como una sola mediante

$$\gamma\sqrt{2} + \delta = (\alpha\sqrt{2} + \beta)(\sqrt{2} + 1).$$

Partiendo de la primera solución $a = 1$, $b = 1$, ¡se obtienen todas de este modo multiplicando por $\sqrt{2} + 1$!

$$2\sqrt{2} + 3 = (1\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$5\sqrt{2} + 7 = (2\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^3$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$70\sqrt{2} + 99 = (\sqrt{2} + 1)^6$$

Soluciones

La soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$ cumplen

$$a\sqrt{2} + b = (\sqrt{2} + 1)^n$$

Usando el conjugado $-a\sqrt{2} + b = (-\sqrt{2} + 1)^n$ y sumando y restando:

La soluciones de $2a^2 - b^2 = \pm 1$ son:

$$a = \frac{(\sqrt{2} + 1)^n - (-\sqrt{2} + 1)^n}{2\sqrt{2}}, \qquad b = \frac{(\sqrt{2} + 1)^n + (-\sqrt{2} + 1)^n}{2}$$