La sumación de Poisson y parientes cercanos

Fernando Chamizo Lorente

Resumen

Este artículo divulgativo sobre la fórmula de sumación de Poisson es una versión extendida de la charla que impartí en la Universitat Autònoma de Barcelona el 14 de diciembre de 2016. Comenzando con el caso euclídeo de una dimensión, se muestran algunas de sus aplicaciones y sus análogos en otros contextos.

1. ¿Quién teme a las series que no convergen?

¿Recuerdas cómo te metían miedo en Cálculo I con ese teorema de Riemann que decía que las series condicionalmente convergentes se podían reordenar para que la suma fuera cualquier número? ¿Y qué decir de las no convergentes? ¿Te acuerdas del desasosiego que te produjo $1 = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$? ¿No dejaste de confiar en el profe de Física I cuando te dijo que la delta de Dirac δ era una función que valía cero en todos los puntos e infinito en el cero pero que integraba uno? Pues, agárrate, la fórmula que resume la sumación de Poisson es

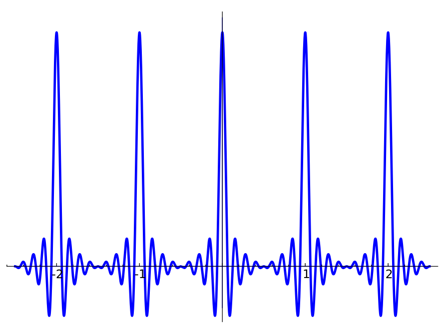
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}. \tag{1.1}$$

Una vez que se ha expuesto a algún lector al infarto matemático[1], veamos qué sentido tiene esto, primero intuitivo y después con una prueba matemática de esas que nos gustan.

Si metemos el hacha de cortar infinitos en el segundo miembro de (1.1), queda una humilde serie geométrica que podemos sumar y hasta dibujar porque es real como la vida misma

(1.2)

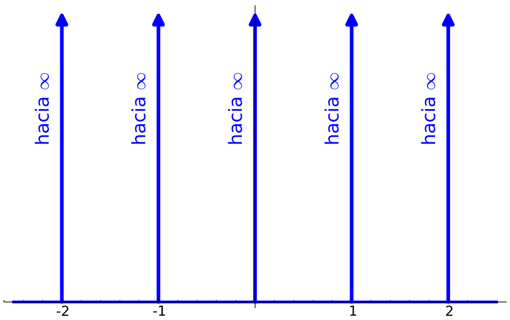
$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi i n x} = \frac{e^{-2\pi i (N+1)x} - e^{2\pi i N x}}{e^{-2\pi i x} - 1} = \frac{\sin\big(\pi(2N+1)x\big)}{\sin(\pi x)} = \dots$$



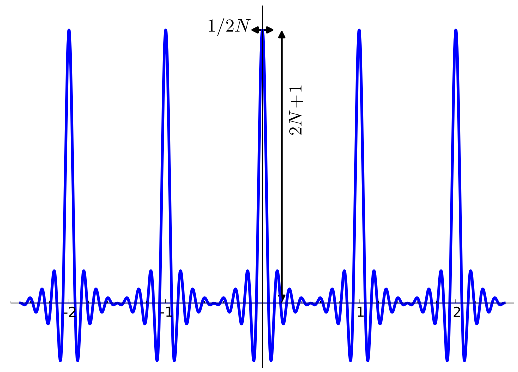
$\dots$

[1] Si te gustan las emociones más fuertes, abre un libro de teoría cuántica de campos, allí verás pocas cantidades finitas distintas de los números de página (vale, es una exageración, pero si eres matemático nunca habrás visto tantas integrales divergentes juntas).

El bulto grande que aparece en los enteros es de altura $2N+1$ y de anchura media más o menos $1/2N$, entonces (1.1) suena bien visualmente:



$$= \lim_{N\to\infty}$$



Y si integramos $D_N(x)$ contra una función que decaiga bien, el resultado se aproxima por la suma de los valores de f en los enteros que es donde están los bultos. Si confiamos en que $N\to\infty$ no nos hace ninguna jugarreta, tenemos la forma habitual de la *fórmula de sumación de Poisson*

$$(1.3) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \qquad \text{con} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx.$$

Esto es equivalente a (1.1) o lo que le da sentido. La $\widehat{f}$ es la famosa *transformada de Fourier* de f.

Vale, la deducción de (1.3) como broma está bien, pero ¿cuál es la demostración para un matemático serio? Muy fácil: se define la función 1-periódica $F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$, que bajo condiciones adecuadas de regularidad debe ser igual a su serie de Fourier, por tanto

$$(1.4) \qquad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 F(t)e^{-2\pi i n t}dt\; e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i n t}dt\; e^{2\pi i n x}$$

y basta tomar $x=0$.

2. Formulitas y formulotas

Una vez que tenemos el martillo, vamos a buscar los clavos. La función más sencilla que sabemos integrar es la exponencial e^{-x}. Pongámosle un valor absoluto para que no se desmande en $-\infty$ y un $2\pi\alpha$ para hacerlo bonito. Esto es, tomemos $f(x)=e^{-2\pi\alpha|x|}$. El lado izquierdo de (1.3) es una serie geométrica, bueno... dos, que sabemos sumar, lo que unido al cálculo de las integrales del lado derecho da lugar a

$$(2.1) \qquad \frac{e^{\pi\alpha}+e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

Una bella fórmula que generaliza el bien conocido $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ del maestro sumador Euler. ¿Lo generaliza? Sí, se deja como ejercicio deducirlo de (2.1).

Nuestra prueba de (2.1) requiere $\alpha > 0$ pero Poisson nos ha dado más de lo esperado: por extensión analítica se cumple para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $i\alpha \notin \mathbb{Z}$. Para α imaginario puro, (2.1) es el conocido desarrollo de la cotangente, también del maestro, y su desarrollo de Laurent permite calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ cuando k es par.

Los valores absolutos tienen mala fama en el cálculo infinitesimal por eso de que los pobres no son derivables. Al grito de ¡gaussianízate! cambiamos la variable para conseguir $f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}$ y jugando con variaciones de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, (1.3) nos da la fórmula válida para $\Re(\alpha) > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/2\alpha}. \tag{2.2}$$

Vamos ahora con las formulotas. Se tiene el cálculo

$$\Big(\frac{1}{2}\sum_{n=-15}^{15} e^{-n^2/4}\Big)^2 = 3.141592653589793\bar{3}2840224\ldots \tag{2.3}$$

¿Es esto π? Ciertamente lo es para tu calculadora pero desde el dígito con boina difiere. Con (2.2) podrás encontrar una explicación a este fenómeno y, con más esfuerzo, es posible acotar suficientemente bien los errores para anticipar sin muchos cálculos numéricos que la diferencia aparece justo en el decimal 16.

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-s}\cos(2\pi x)\, dx$ tiene sentido para $0 < s < 1$ y da $2(2\pi)^{s-1}\sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)$. Tomando $f(x) = |x|^{-s}$ en (1.3) y cerrando los ojos se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{-s} = 2(2\pi)^{s-1}\sin\big(\frac{\pi s}{2}\big)\Gamma(1-s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s-1}. \tag{2.4}$$

¿Formulita o formulota? Formulota, si una suma existe la otra no y $n = 0$ da lugar a infinitos pero... había una cosa llamada función $\zeta(s)$ que extendía analíticamente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ y servía para estudiar los primos. Si nos olvidamos de los $n = 0$ y de la convergencia, lo anterior se reescribe como

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\big(\frac{\pi s}{2}\big)\Gamma(1-s)\zeta(1-s), \tag{2.5}$$

que es la ecuación funcional correcta en forma asimétrica. Para el que esté ansioso por justificar este misterio, está la bibliografía de (la vieja) guardia [Gui41] [Ing90, III.4].

3. Más dimensiones y menos dimensiones

Extender (1.3) a más dimensiones es pura rutina: se suma en $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ y en la definición de $\widehat{f}$ se escribe $\vec{\xi} \cdot \vec{x}$. Por si eso sabe a poco, generalicemos $\mathbb{Z}^d$ considerando un retículo en $\mathbb{R}^d$, eso es simplemente $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ con A una matriz cuadrada no singular y se llama retículo dual a $\Lambda^* = \left(A^{-1}\right)^t\mathbb{Z}^d$. Con la fórmula de cambio de variable tenemos fácilmente la generalización d-dimensional en retículos

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}) \tag{3.1}$$

donde $|\Lambda| := \det(A)$. Por ejemplo, si elegimos $f(\vec{x}) = e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}$, (2.2) se generaliza a

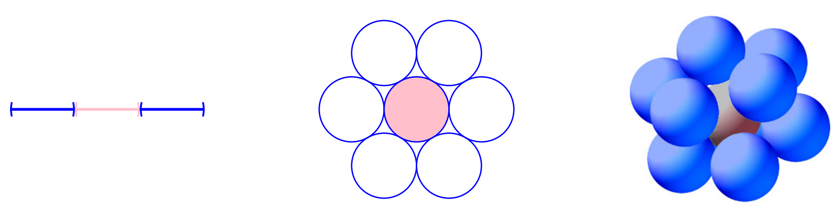
$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} = |\Lambda|^{-1}(2\alpha)^{-d/2} \sum_{\vec{n}\in\Lambda^*} e^{-\pi\|\vec{n}\|^2/2\alpha}. \tag{3.2}$$

Una vez que hemos subido la dimensión la podemos bajar. No es broma del todo. Si f tiene simetrías especiales, es posible agrupar valores iguales dando lugar a una fórmula en menos dimensiones aparentemente muy distinta. Por ejemplo, si $\Lambda = \Lambda^* = \mathbb{Z}^2$ y f es radial, $f(\vec{n}) = g(n_1^2 + n_2^2)$ y $g(n)$ aparecerá con multiplicidad $r(n)$, el número de representaciones como suma de dos cuadrados. Trabajando los detalles [IK04, §4.4], se tiene una impresionante fórmula con función de Bessel y todo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n)g(n) = \pi \int_0^\infty g(x)\, dx + \pi \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \int_0^\infty g(x) J_0(2\pi\sqrt{nx})\, dx \tag{3.3}$$

que es fundamental para estudiar el problema del círculo de Gauss [IK04] [LWL24].

Vamos a ver una bella y rápida aplicación [Sko02] de (3.2) al "kissing number problem" que pregunta cuál es el máximo número de esferas que pueden besar simultáneamente a otra, todas del mismo tamaño. Aquí "besar" significa "tocar". Sí, está claro que besar no es lo mismo que tocar... mejor no seguir por ahí y simplemente mirar estas figuras, donde $\kappa(d)$ es el "kissing number" (¿número osculador?) en dimensión d:



$\kappa(1)$=2 $\kappa(2)$=6 $\kappa(3)$=12

En la última figura, las esferas besuqueadoras se pueden colocar en los vértices de un icosaedro regular y probar $\kappa(3) = 12$ no es nada fácil. Las doce esferas dejan huecos y no está claro si cabe una decimotercera apretujándolas un poco. Esta polémica, que parte del siglo XVII, no fue resuelta con rigor hasta mediados del siglo XX.

Aquí nos restringimos al "lattice kissing number" $\ell(d)$, que es lo mismo pero suponiendo que los centros de las esferas están en un retículo. Uno tendería a pensar que $\kappa(d) = \ell(d)$ por eso de la elegancia y el orden en matemáticas, de hecho los seis valores conocidos[2] de $\kappa(d)$ coinciden con $\ell(d)$ pero se sabe indirectamente que $\kappa(9) \neq \ell(9)$. Por otro lado, está claro que $\kappa(d) \geq \ell(d)$.

Llamemos $F(\alpha)$ al lado izquierdo de (3.2) multiplicado por $\alpha^{d/2}$. Si hemos logrado poner ℓ esferas de radio $1/2$ con centros en Λ besando la esfera unidad, separando de la suma $\|\vec{n}\| = 0,\ 1,\ \textsf{mayor}$,

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2}\big(1 + \ell e^{-2\pi\alpha} + \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}\big). \tag{3.4}$$

Lo crucial es que (3.2) asegura que $F(\alpha)$ es creciente. Si $\alpha > d/4\pi$,

$$0 \leq F'(\alpha) = \frac{d}{2}\alpha^{d/2-1} + \alpha^{d/2-1}\ell e^{-2\pi\alpha}\big(\frac{d}{2} - 2\pi\alpha\big) + \textsf{cosas negativas}. \tag{3.5}$$

Eligiendo de manera óptima $\alpha = (d+2)/4\pi$, se concluye

$$\ell(d) \leq \frac{d}{2}e^{d/2+1}. \tag{3.6}$$

Esto no está nada mal si se compara con los resultados conocidos cuando $d \to \infty$. Por cierto, un problema relacionado es el empaquetamiento de esferas en dimensiones altas y las mejores cotas superiores se obtienen con procedimientos parecidos [PZ04] [CE03].

4. Bienvenido al mundo modular

La variable compleja es muy rígida, en cuanto pones muchas condiciones te quedas sin funciones, como las compañías teatrales mediocres. Por ejemplo, si uno busca las funciones F holomorfas en $\mathbb{C}$ (enteras) que tengan dos periodos, digamos $F(z) = F(z+1)$ y $F(z) = F(z+i)$, sólo hay una muy aburrida una vez que se ha especificado $F(0)$, la función constante $F(z) = F(0)$.

Cuando uno considera funciones holomorfas en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z\ :\ \Im(z) > 0\}$ e impone condiciones relacionadas con ciertos grupos hiperbólicos, la teoría adquiere una riqueza y profundidad increíble. Es la teoría de las formas modulares y si no has oído mencionarla, no eres de este mundo (matemático). En este contexto, se puede probar por ejemplo que sólo hay una función holomorfa en $\mathbb{H}$ que cumple

$$F(z) = F(z+1), \qquad F(z) = \frac{-1}{4z^2}F\Big(-\frac{1}{4z}\Big), \tag{4.1}$$

una vez que especificamos el valor de $F(i\infty) := \lim_{\Im(z)\to+\infty} F(z)$, supuesto finito al igual que $\lim_{\Im(z)\to 0^+} \Im(z)^{2016}F(z)$, donde puedes cambiar 2016 por cualquier $N > 2$, siempre da cero.

[2]Son $\kappa(1) = 2$, $\kappa(2) = 6$, $\kappa(3) = 12$, $\kappa(4) = 24$, $\kappa(8) = 240$, $\kappa(24) = 196560$, como dijo J.H. Conway, es que hay un montón de espacio allí arriba. Fue Gauss el primero que probó $\ell(3) = 12$, dando un retículo sencillo que sustituye al icosaedro antes mencionado.

Vamos a ver cómo deducir de ello un resultado clásico pero complicado de teoría de números gracias a (1.3). Definamos $F(z)$ como el lado izquierdo de (2.2) elevado a la cuarta potencia con $\alpha = -iz$. Esto es,

$$F(z) := \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z} \Big)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z}, \tag{4.2}$$

donde $r_4(n)$ es el número de representaciones como suma de cuatro cuadrados. Gracias a (2.2), la función F satisface (4.1) y proclamamos, según lo anterior, que es la única con $F(i\infty) = 1$. El alumno genial y desconfiado de la última fila, un tal Eisenstein sin escalinata y con "s" y "e", podría dar un ejemplo desconcertante

$$G(z) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{m \\ (m,n)\neq(0,0)}} \sum_{n} \Big(\frac{4}{(m+4nz)^2} - \frac{1}{(m+nz)^2} \Big). \tag{4.3}$$

A pesar de lo aparatoso de la fórmula es muy sencillo (sí, de verdad) comprobar que G verifica (4.1) si no te distraes preocupándote con la convergencia. Por otro lado, hallar $G(i\infty)$ se reduce a considerar la contribución de $n = 0$ que es $\pi^{-2} \sum_{m\neq 0} 3m^{-2} = 1$. Hay que admitir entonces la identidad delirante $F(z) = G(z)$ por la unicidad de las funciones que cumplen (4.1).

Todavía hay más, con (1.3) y usando residuos para hallar $\widehat{f}(n)$, se tiene

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+w)^2} = -4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m e^{2\pi i m w}, \tag{4.4}$$

que es válida para $w \in \mathbb{H}$ tal como está y extensible a $-w \in \mathbb{H}$ cambiando $e^{2\pi i m w}$ por $e^{-2\pi i m w}$. Es posible también obtener esta fórmula como consecuencia indirecta de (2.1). Sustituyendo en G y haciendo los cálculos, separando enes positivas negativas y nulas, la identidad delirante se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z} = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \big(m e^{2\pi i m n z} - 4m e^{2\pi i 4 m n z} \big). \tag{4.5}$$

Si ahora comparamos los coeficientes de $e^{2\pi i n z}$ en ambos miembros, se tiene el golpe final, la fórmula apabullante:

$$r_4(n) = 8 \sum_{4\nmid d,\ d\mid n} d. \tag{4.6}$$

Una identidad limpia, breve y profunda. Por ejemplo, sin escribir ni una cuaterna de cuadrados, se deduce

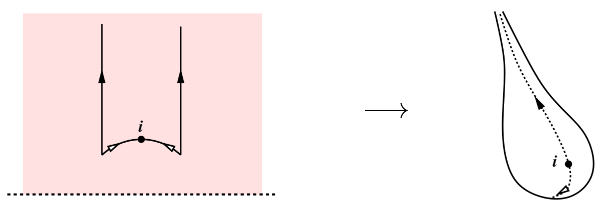
$$r_4(2016) = 8(1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 9 + 14 + 18 + 21 + 42 + 63 + 126) = 2496. \tag{4.7}$$

¿Y qué ocurre para otro número de cuadrados? ¿Hay fórmulas tan limpias? Sólo en algunos casos y eso está relacionado con las propiedades de las formas modulares [Gro85] [Har20] [Ran77] [Iwa97]. El lector abrumado encontrará en [Ven70] una prueba elemental de (4.6) y de otras fórmulas relacionadas.

5. Geometría, análisis y aritmética

Las formas modulares, funciones que tienen simetrías relacionadas con (4.1), han estado tradicionalmente ligadas a la variable compleja. Algunas de ellas aparecen naturalmente al aplicar (1.3) para probar la ecuación funcional de ciertos objetos relevantes en aritmética. En este contexto, H. Maass se percató de que al tratar cuerpos algebraicos reales era natural introducir funciones con simetrías similares pero no holomorfas[3]. Si perdemos la variable compleja ¿qué se salva? Una teoría endiabladamente complicada pero útil y bella [Rab15]. El resultado más representativo es la fórmula de la traza de Selberg [Sel56], una fórmula de sumación de Poisson que combina geometría, análisis y aritmética.

Comencemos por la geometría. El semiplano $\mathbb{H}$ fue introducido por Poincaré como modelo de geometría hiperbólica (curvatura -1) dotado de la métrica $ds^2 = y^{-2}\big(dx^2 + dy^2\big)$. Esto significa que arriba las cosas están más cerca de lo que parecen y abajo lo están menos. Las transformaciones $z \mapsto z+1$, $z \mapsto -1/z$ generan un grupo Γ y las funciones invariantes por ellas se pueden entender como funciones en la superficie (de Riemann) obtenidas al identificar los lados de un dominio fundamental.



Hasta aquí la geometría, ahora vamos con el análisis. Asociado a la métrica hay un operador de Laplace-Beltrami $-\Delta$ que tiene autovalores $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ correspondientes a autofunciones normalizadas $\{u_j(z)\}_{j=0}^{\infty}$ (no holomorfas). Pues bien, en este contexto el análogo de (1.1) es

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} D(z,\gamma w) = \sum_j u_j(z)\overline{u_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(z,1/2+ir)\overline{E(w,1/2+ir)}\,dr, \tag{5.1}$$

donde $D(z,w)$ es una delta de Dirac centrada en z en el sentido que definiremos a continuación y las funciones E son las series de Eisenstein espectrales y, aunque son totalmente explícitas (a diferencia de las u_j), haciendo honor a su denominación espectral desvaneceremos su contribución en puntos

[3] En palabras de A. Weil [Wei79, p.463], *fue necesario Maass para sacarnos del gueto de las funciones holomorfas.*

suspensivos. Para pasar de (1.1) a (1.3), integramos contra una función. Hagamos aquí lo mismo. Si $K(z, v)$ sólo depende de la distancia de z a v, entonces

$$\int K(z, v)D(v, \gamma w)\, d\mu_v = K(z, \gamma w) \quad \text{y} \quad \int K(z, v)u_j(v)\, d\mu_v = h(\lambda_j)u_j(z) \tag{5.2}$$

donde μ_v es la medida correspondiente a la métrica y h es cierta transformada integral de K. Lo primero es la definición de la delta de Dirac y lo segundo es algo menos natural. Esencialmente dice que un promedio de autofunciones con el mismo autovalor sigue siendo autofunción. El análogo en $\mathbb{R}$ sería

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(|x-t|)e^{2\pi i n t}\, dt = h(|n|)e^{2\pi i n x} \qquad \text{con} \quad h = \widehat{g}, \quad g(x) = f(|x|). \tag{5.3}$$

Con esto se llega a la fórmula de pretraza

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} K(z, \gamma w) = \sum_j h(\lambda_j)u_j(z)\overline{u_j(w)} + \dots \tag{5.4}$$

El nombre es demasiado optimista, hay muchas complicaciones técnicas hasta llegar a la traza. Lo que nos gustaría es integrar en $z = w$ para que las u_j desaparezca, por estar normalizadas, esto es literalmente hallar la traza. Sin embargo, el malaje de los puntos suspensivos tiene traza infinita y hay que truncar y encontrar un trozo en la suma en Γ que cancele el infinito en el límite. El artífice de la fórmula, A. Selberg, no se detuvo ahí, organizó la traza del primer miembro separando clases de conjugación para darle un significado geométrico. El resultado final es algo de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\big(\sqrt{\lambda_n - 1/4}\big) = \frac{1}{2}\sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_n \widehat{f}(k\ell_n)}{\sinh(k\ell_n/2)} + \dots \tag{5.5}$$

donde ℓ_n son las longitudes de las geodésicas cerradas.

¿Y dónde está la aritmética? Hay dos cosas notables. La primera es una similitud formal entre el conjunto $\{e^{\ell_n}\}$ y el de los primos de toda la vida pero con una función ζ que satisface, casi trivialmente, la hipótesis de Riemann. La otra, más importante, es que las longitudes están relacionadas con las llamadas soluciones fundamentales de la ecuación de Pell y sus multiplicidades, con números de clases de cuerpos cuadráticos reales; dos objetos realmente elusivos sobre los que la fórmula de la traza da una información sorprendente [Sar82].

6. Más fórmulas de Poisson

La sencilla prueba de (1.3) nos revela dos ingredientes fundamentales: las series de Fourier y empapelar $\mathbb{R}$ con $[0, 1]$ a través de las traslaciones enteras.

Las series de Fourier tienen una generalización bastante fiel (sin las complicaciones no conmutativas de la teoría de Selberg) en los grupos abelianos localmente compactos [Kat04]. Si dentro de uno de estos grupos G se tiene un subgrupo discreto H, un sosias de las traslaciones enteras, servirán para empapelar G con G/H. La fórmula de sumación de Poisson generalizada que se obtiene siguiendo este esquema tiene la pinta

$$\sum_{h\in H} f(h) = \sum_{\chi\in\widehat{G/H}} \widehat{f}(\chi), \tag{6.1}$$

donde $\widehat{f}$ es una transformada de Fourier generalizada y $\widehat{G/H}$ es el grupo de caracteres, los homomorfismos continuos $\chi : G/H \longrightarrow \{|z| = 1\}$. En (1.3), $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$ y los caracteres son $\chi_n(x) = e^{2\pi inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$, que pueden identificarse con los enteros llamando n a χ_n.

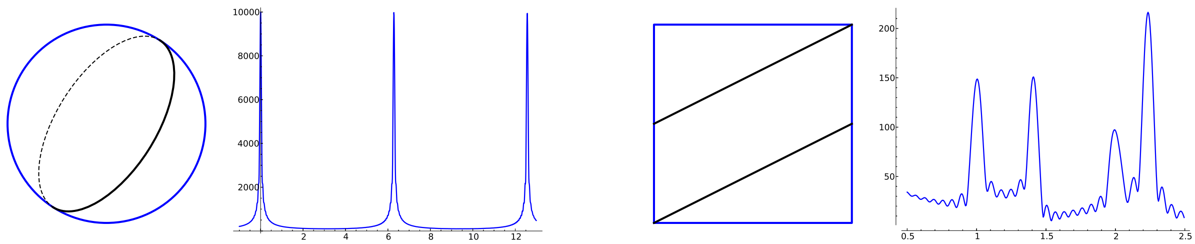
¿Es esto abstraer por abstraer? ¿Estamos ante una de esas teorías tan generales que tienen como único caso particular el que ya nos sabíamos? Rotundamente no. La famosa tesis de Tate, que es realmente la tesis doctoral de J. Tate [Tat67], maneja estas ideas para integrar de manera elegante en un objeto global (una función L de Hecke) la información aritmética de cuerpos de números gracias a una fórmula de sumación sobre los adeles [SD01]. También es posible dar una prueba del teorema de Riemann-Roch con una fórmula de sumación de Poisson generalizada [RV99].

La fórmula de la traza de Selberg es universalmente famosa pero hay otra fórmula de sumación de Poisson en el mundo modular no holomorfo que ha tenido un impacto mucho mayor en la teoría de números actual: la fórmula de Kuznetsov [Kuz80]. El lado izquierdo de (5.1) es una función, por decir algo, 1-periódica en z, que admite un desarrollo de Fourier de toda la vida. Sus coeficientes están relacionados con la distribución del inverso multiplicativo con respecto a un módulo que varía y cuando se comparan con los del lado derecho de (5.1), surge entre un amasijo de funciones especiales una relación entre la distribución de los inversos, autovalores y autofunciones. ¿Es esto complicado? Sí, bastante (publicidad poco subliminal: en [CR15] hay una prueba que hasta un niño[4] podría seguir) pero desde los años 80 muchos autores han probado que merece la pena y que lo poco que sabemos de autovalores y autofunciones es suficiente para decir cosas que no sabíamos de la distribución de los inversos.

En el lado geométrico, la fórmula de la traza de Selberg anticipó en muchos años los trabajos [Cha74] y [DG75] (ver también [CdV72]). En ellos se prueba que si λ_n son los autovalores del operador de Laplace-Beltrami $-\Delta$ de una variedad riemanniana compacta entonces $\sum e^{ix\sqrt{\lambda_n}}$ es algo con singularidades, deltas de Dirac por así decirlo, en $x = k\ell_n$ con ℓ_n las longitudes de las geodésicas cerradas y $k \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, en la esfera unidad es bien conocido que los autovalores son los enteros de la forma $k(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, cada uno con multiplicidad $2k+1$ (las posibles orientaciones del espín entero) y todas las geodésicas son circunferencias máximas de longitud 2π. En la primera gráfica se

[4](con un máster en matemáticas)

ha dibujado el módulo de $\sum e^{ix\sqrt{\lambda_n}}$ para $\lambda_n < 10^4$ y se aprecian claramente los picos en los múltiplos de 2π.



Si ahora consideramos el toro plano unidad, esto es, el cuadrado unidad con las fronteras derecha e izquierda identificadas y lo mismo con las de arriba y abajo; los autovalores son $4\pi^2 k$ con multiplicidad el número de representaciones de k como suma de dos cuadrados y las longitudes de las geodésicas son las normas de los vectores enteros. Las cuatro primeras son 1, $\sqrt{2}$, 2 y $\sqrt{5}$ (una geodésica de esta longitud está marcada en la figura). La gráfica de la misma función que antes revela picos, más irregulares pero todavía claros, en estas cantidades.

La generalización de (2.2) en el ámbito geométrico ha dado también bastante juego. Con la notación anterior, un análogo honesto del primer miembro de (2.2) es $\sum e^{-\lambda_n \alpha}$. No hay una fórmula exacta pero sí un desarrollo asintótico del tipo $\alpha^{-d/2}\sum_{n\ge 0} c_n\alpha^n$ cuando $\alpha \to 0^+$ donde d es la dimensión. Lo que se prueba es que los coeficientes encierran información geométrica. Por ejemplo, c_0 es, salvo constantes, el volumen y c_1 es la integral de la curvatura escalar [MS67] [Sin75].

7. Historias e historietas

Siméon Denis Poisson (1781–1840) es este señor de la imagen y a la derecha algunas de sus contribuciones que aparecen en los grados de física o matemáticas.

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \qquad -\Delta F = 4\pi\rho,$$

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Fue un investigador y profesor infatigable que vivió los turbulentos años de la restauración monárquica tras la revolución francesa. En la vida de Galois desempeña un papel, posiblemente injusto, del lado de los malos de la película por no haber apreciado su famosa memoria y recomendar a la Academia de Ciencias que no fuera admitida[5]. El nombre de Poisson es uno de los 72 de ilustres franceses que aparece en la torre Eiffel. No es para menos, sus contribuciones a la física y a las matemáticas son ciertamente notables. Su producción es inmensa, se estima que escribió entre 300 y 400 trabajos.

Según algunas referencias, la fórmula de sumación de Poisson está en su memoria *Sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides* publicada en el Journal de l'École Royale Polytechnique en 1823. Quizá esté allí[6] porque hay muchas series de Fourier pero ¿dónde?

Afortunadamente a continuación de esta memoria, dentro del mismo volumen, hay otro trabajo de Poisson: *Sur les intégrales définies et sur la sommation des séries*, el título es bastante esperanzador y en la página 451 aparece:

$$\frac{1}{2}F(0) + \Sigma F(2nl) = \frac{1}{2}A_\circ + \Sigma A_n,$$

$$\int_\circ^\infty \cos\frac{n\pi z}{l}\, Fz \,\frac{dz}{l} = A_n.$$

En caligrafía moderna LaTeXiana,

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(2ln) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{con} \quad A_n = \frac{1}{l}\int_0^\infty \cos\Big(\frac{n\pi z}{l}\Big)F(z)\,dz. \tag{7.1}$$

Para deducir (1.3) tomamos $l = 1/2$ y f la extensión par de F, $f(x) = F(|x|)$. El primer miembro de (7.1) es

$$\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n). \tag{7.2}$$

Mientras que el segundo miembro es

$$\int_0^\infty f(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \cos(2\pi nx)f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \cos(2\pi nx)f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\widehat{f}(n). \tag{7.3}$$

Con esto queda probado (1.3) a partir de la fórmula original (7.1) para funciones pares. ¿Y para las impares? Muy fácil: $0 = 0$. ¿Y para el resto? Todas las funciones son suma de una par y otra impar.

¿Cómo deduce (7.1) Poisson? Esencialmente como se deduce (1.3) pero de una manera más enrevesada, considera la serie de cosenos en lugar de la de Fourier, teniendo cuidado con las discontinuidades que induce en los extremos. Ya es tarde para que mande una fe de erratas pero de hecho

[5] Provisionalmente: "Se puede pues esperar a que el autor haya publicado su trabajo completo para formarse una opinión definitiva" [Cor00].

[6] *N. del A.* No he sido capaz de encontrarla en dicha memoria.

hay un pequeño error en su fórmula de partida justamente por la contribución de esos términos. Poisson no da referencias a trabajos anteriores, por lo cual es natural suponer que es en este trabajo donde la obtuvo originalmente. Quizá se considere parte de su larga memoria sobre el calor.

Para terminar, un reto para el lector. Unas páginas antes de llegar a su fórmula, Poisson da sentido a algunas series divergentes curiosas:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2},$$
$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \&c. = \frac{2}{3},$$
$$1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + \&c. = \frac{3}{4},$$

¿Qué estaba usando para llegar a tan estrafalarias identidades? Pista: empieza por "núcleo de".

Agradecimientos. Estoy en deuda con Carlos Pastor y con Dulcinea Raboso por sus interesantes sugerencias sobre una versión previa de este documento. Quiero expresar un grandísimo agradecimiento a Manuel Castellet, Xavier Xarles y al resto de los miembros del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona que me atendieron tan inmerecidamente bien durante mi visita.

Referencias

[CdV72] Y. Colin de Verdière. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 275:A805–A808, 1972.

[CE03] H. Cohn and N. Elkies. New upper bounds on sphere packings. I. *Ann. of Math. (2)*, 157(2):689–714, 2003.

[Cha74] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.

[Cor00] F. Corbalán. *Galois. Revolución u matemáticas.* Nivola libros y ediciones, S.L., 2000.

[CR15] F. Chamizo and D. Raboso. On the Kuznetsov formula. *J. Funct. Anal.*, 268(4):869–886, 2015.

[DG75] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1):39–79, 1975.

[Gro85] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[Gui41] A. P. Guinand. On Poisson's summation formula. *Ann. of Math. (2)*, 42:591–603, 1941.

[Har20] G. H. Hardy. On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21(3):255–284, 1920.

[IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Ing90] A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.

[Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Kat04] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[Kuz80] N. V. Kuznecov. The Petersson conjecture for cusp forms of weight zero and the Linnik conjecture. Sums of Kloosterman sums. *Mat. Sb. (N.S.)*, 111(153)(3):334–383, 479, 1980.

[LWL24] J. E. Littlewood, A. Walfisz, and E. Landau. The lattice points of a circle. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 106(739):478–488, 1924.

[MS67] H. P. McKean, Jr. and I. M. Singer. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 1(1):43–69, 1967.

[PZ04] F. Pfender and G. M. Ziegler. Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs. *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(8):873–883, 2004.

[Rab15] D. Raboso. When the modular world becomes non-holomorphic. In *Trends in number theory*, volume 649 of *Contemp. Math.*, pages 221–244. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[Ran77] R. A. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977.

[RV99] D. Ramakrishnan and R. J. Valenza. *Fourier analysis on number fields*, volume 186 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Sar82] P. Sarnak. Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *J. Number Theory*, 15(2):229–247, 1982.

[SD01] H. P. F. Swinnerton-Dyer. *A brief guide to algebraic number theory*, volume 50 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Sel56] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:47–87, 1956.

[Sin75] I. M. Singer. Eigenvalues of the Laplacian and invariants of manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1*, pages 187–200. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[Sko02] N.-P. Skoruppa. Quick asymptotic upper bounds for lattice kissing numbers. *Mathematika*, 49(1-2):51–57 (2004), 2002.

[Tat67] J. T. Tate. Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 305–347. Thompson, Washington, D.C., 1967.

[Ven70] B. A. Venkov. *Elementary number theory.* Translated from the Russian and edited by Helen Alderson. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.

[Wei79] A. Weil. *Scientific works. Collected papers. Vol. III (1964–1978).* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.