CONTAR CON LOS DEDOS Y CON INTEGRALES

FERNANDO CHAMIZO LORENTE

Resumen. Se pretende dar una breve introducción a la teoría analítica de números mostrando cómo el cálculo infinitesimal y el análisis armónico permiten tratar algunos problemas de carácter aritmético y combinatorio. Con vistas a minimizar los prerrequisitos, se incidirá más en las ideas generales que en los razonamientos rigurosos completos.

Contar es una actividad básica, presente ya en los albores de la humanidad y a la vez materia de un área tan compleja como la combinatoria. Por otro lado es inseparable de la propia noción de número natural y estrechamente ligada a la teoría de números.

Todavía hoy, tras 150 años de historia y bastantes más si consideramos la contribución de L. Euler, a muchos les resulta extraño el término teoría *analítica* de números. Si los números naturales o los enteros conforman un conjunto discreto, ¿dónde aparece el análisis? Dicho sea de paso, cuestiones parecidas más profundas y concretas también surgen en la parte algebraica: un geómetra podría preguntarnos qué sentido tiene considerar cohomologías o ciertas formas diferenciales en variedades hiperbólicas, las formas modulares, para resolver problemas aritméticos.

Naturalmente estas preguntas no tienen una respuesta sencilla y comprenderlas requiere un cierto nivel de conocimientos. Además los matemáticos tenemos en general un problema con la divulgación: no sabemos mentir. La matemática contemporánea está firme y afortunadamente asentada en el rigor pero esta virtud a veces se convierte en exceso cuando nos separamos del ámbito de la investigación o del público de los colegas cercanos. La mayoría de nostros aceptaríamos gustosos en aras de la comprensión de un área ajena una mentirijilla piadosa definida como un teorema sin hipótesis técnicas. Lo hacemos a menudo al leer divulgación en Física (en palabras de I. Stewart: "No estoy sugiriendo que nos convirtamos en vendedores; pero sí digo que la prosperidad de Matemáticas S.A. depende de la creación de un buen equipo de vendedores" [13]).

Nos proponemos aquí ilustrar un aspecto de la teoría analítica de números mostrando, con algunos ejemplos y eliminando el lastre de los puntos más técnicos, cómo a veces es conveniente contar con integrales.

15–20 de junio de 2008. Margarita. Venezuela.

1. Contar con los dedos no es tan fácil

Imaginemos las bolas de billar americano, distintas de la blanca, en su posición inicial. ¿Cuántas hay? Es sencillo: una mano, otra mano y otra más, debido a la forma triangular 1+2+3+4+5=15. ¿Y si nos imaginásemos un billar gigantesco, digno de un libro de *records*, donde el lado del triángulo fuera 100? Una cuenta bola a bola sería tediosamente impracticable y ante la suma $1+2+3+\cdots+100$ tampoco entran ganas de utilizar los dedos para tomar lápiz y papel o incluso calculadora. Tenemos sin embargo el truco genial que aplicó un jovencísimo C.F. Gauss [1] cuando el maestro quiso mantener entretenidos a sus alumnos:

$$\begin{array}{rcrcrcccrcrcrl} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 48 & + & 49 & + & 50 & \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 53 & + & 52 & + & 51 & \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 & + & 101 & = \mathbf{5050} \end{array}$$

Siendo matemáticos se nos permite fantasear a voluntad, ¿qué ocurriría si tuviéramos un billar especial y espacial en el que una pirámide de base cuadrada, como las de Egipto, sustituye al triángulo? Esto nos llevaría a calcular $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$ y el truco de Gauss no sirve. En general podríamos buscar una fórmula para

$$S_k = \sum_{n=1}^{N} n^k. \tag{1.1}$$

Otros problemas que exigen contar es dudoso que tengan una solución con una fórmula cerrada sencilla, por ejemplo contar cuántos primos hay menores que N (véanse en [8] algunas "fórmulas exactas"), y por ello es natural rebajar nuestras exigencias buscando una fórmula sencilla lo más aproximada posible. En relación con esto Gauss conjeturó en 1849 que

$$\pi(N) := \#\{\text{primos} \le N\} \sim \int_2^N \frac{dt}{\log t} \tag{1.2}$$

donde $\sim$ indica que el error relativo tiende a cero cuando $N \to \infty$. Este resultado es el célebre *teorema de los números primos* probado independientemente por J. Hadamard y por C.J. de la Vallée-Poussin en 1896 (véase [4] para la prueba moderna y [12] y [10] para simplificaciones notables), casi 40 años después de que B. Riemann escribiera su famosa memoria en la que esboza una demostración a partir de propiedades analíticas de cierta función meromorfa.

2. Contar con integrales

La función que cuenta los enteros positivos hasta x es la parte entera

$$[x] = \#\{n \le x \;:\; n \in \mathbb{Z}^+\}$$

que se extiende a los valores negativos de la forma habitual: como el entero más próximo a x menor o igual que x. Para contar con integrales escribimos

$$[x] = \int_{1/2}^{x} \delta_p$$

donde δ_p es la "derivada" de $[x]$. Nuestro profesor de Cálculo I nos dirá, con razón, que tal derivada no existe. Admitamos la trampa pensando en que si aproximamos $[x]$ por funciones buenas, con infinitas derivadas, entonces la igualdad anterior y el resto de la sección es rigurosamente cierta convenientemente ensuciada con límites por todos los sitios y esquivando las discontinuidades. La derivada es local e invariante al sumar constantes, entonces en este sentido

$$\delta_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \tag{2.1}$$

donde δ es la *delta de Dirac*, la "derivada" de la función escalón que vale 0 en los negativos y uno en los positivos, es decir $\int_a^b \delta = 1$ si $a < 0 < b$. Como las funciones regulares de verdad se aproximan localmente bien por constantes, se debe tener $\int_a^b f\delta = f(0)$ para $a < 0 < b$ mientras que la integral es cero si a y b tienen el mismo signo. Por supuesto tal δ no existe pero las distribuciones introducidas por L. Schwartz garantizan que no hay problemas si integrando por partes volvemos al mundo real. Esta propiedad fundamental de δ revela, tras (2.1), a δ_p como el nexo entre sumar o contar e integrar:

$$\sum f(n) = \int f\delta_p. \tag{2.2}$$

Por ejemplo, veamos cómo calcular S_2:

$$S_2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \int_{0^+}^{N^+} x^2 \delta_p(x)\, dx = N^3 - 2\int_0^N x[x]\, dx$$

donde se ha integrado por partes llegando a una integral fea pero decente a la que el profesor de Cálculo I no pondría ninguna objeción. En promedio $[x]$ es $x - 1/2$ y $2\int_0^N x(x-1/2)\, dx = (4N^3 - 3N^2)/6$, por tanto

$$S_2 = \frac{2N^3 + 3N^2}{6} + 2\int_0^N x f_0(x)\, dx$$

donde $f_0(x)$ es la función con promedio cero $x - [x] - 1/2$. Se cumple $\int f_0 = f_1 + K$ donde f_1 es la función 1-periódica de promedio cero que vale $(x^2 - x)/2 + 1/12$ en $[0, 1]$. Integrando por partes una vez más se obtiene

$$S_2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}.$$

¡Una cuenta exacta obtenida con integrales! El mismo procedimiento iterado funciona sobre (1.1) y las funciones f_j coinciden en $[0, 1]$, salvo multiplicar por j, con los llamados polinomios de Bernoulli ([10] §4.2). La generalización de esta idea prueba la *fórmula de sumación de Euler-Maclaurin*.

3. Contar con ondas

Después de haber derivado funciones discontinuas nadie se asustará si escribimos el desarrollo de Fourier de δ_p. Formalmente es

$$\delta_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}. \tag{3.1}$$

Integrando se obtiene

$$[x] = x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi k x)}{k} + C$$

donde C es la constante de integración. Comparando los promedios de $[x] - x$ y del sumatorio se deduce $C = -1/2$. La fórmula falla cuando $x \in \mathbb{Z}$ porque las ondas suaves no pueden localizar una discontinuidad con precisión infinita, pero a fin de cuentas parece superfluo querer hallar la parte entera de números que ya son enteros.

Con esta fórmula la suma puramente aritmética

$$\sum_{n=a}^{b} [g(n)]$$

que aparece al contar los puntos de coordenadas enteras bajo la gráfica de una función está ligada a estudiar las interferencias de una superposición de ondas

$$\sum_{n,k} \operatorname{sen}\big(2\pi k g(n)\big). \tag{3.2}$$

¿Es éste un problema analítico o aritmético? Vamos a comprobar que admite un tratamiento analítico y de nuevo contar nos lleva a usar integrales. Consideremos el problema desde una perspectiva más general buscando cancelación en sumas del tipo

$$S = \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)}.$$

Para no tener problemas con las discontinuidades en los extremos siempre se puede suponer que la suma es sobre todos los enteros multiplicando por una función buena ϕ que vale 1 en $[a, b]$ y cero fuera de $[a - 1/2, b + 1/2]$. De nuevo pasamos del mundo discreto al continuo a través de δ_p mediante (2.2):

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{2\pi i f(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{2\pi i f(x)} \delta_p(x)\, dx.$$

Utilizando (3.1),

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{2\pi i (f(x)-kx)}\, dx.$$

Digamos que $A \le f' \le B$ entonces si $k \notin [A, B]$ y suponiendo A y B separados de los enteros para no tener problemas en los extremos, la oscilación de kx gana a la de $f(x)$, además $\int \phi(x) e^{-2\pi i m x}\, dx$ tiende rápidamente a cero cuando $m \to \infty$ (intégrese por partes). De este modo se prueba

$$\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} = \sum_{A<k<B} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{2\pi i (f(x)-kx)}\, dx + \mathrm{e}_{\mathrm{mc}} \tag{3.3}$$

donde e_{mc} indica un error menor que una constante. La evaluación o aproximación de las integrales permite estudiar la cancelación. El proceso será ventajoso si la segunda suma tiene menos términos que la primera, intuitivamente cuando el tamaño de la derivada sea menor que el tamaño del intervalo de sumación. ¿Y qué se puede hacer si no lo es? El procedimiento es básicamente subdividir S en trozos más pequeños y elevar al cuadrado cada uno de ellos para que aparezcan incrementos de las frecuencias. Esta técnica combinada con (3.3) es el método de van der Corput para estimar sumas trigonométricas [7], veremos una idea similar al estudiar la aproximación diofántica en §6. En el problema de contar puntos de coordenadas enteras bajo una gráfica es conveniente tener en cuenta las dos variables de sumación en (3.2) y hay métodos muy sofisticados para estudiar las interferencias [9].

4. La ley de reciprocidad cuadrática

Queremos contar las soluciones de $x^2 \equiv p \pmod{q}$ con p y q primos impares distintos. Esta cuenta es muy corta, o bien hay dos soluciones $x \equiv \pm x_0$ o bien no hay ninguna. Se suele denotar con el llamado *símbolo de Legendre* $\left(\frac{p}{q}\right)$ al número de soluciones menos uno. La ley de reciprocidad cuadrática establece una sorprendente simetría entre p y q

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}. \tag{4.1}$$

Las sumas de Gauss

$$G_n(a) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i a k^2/n} \tag{4.2}$$

permiten interpretar (4.1) como una igualdad trigonométrica. Si p es un cuadrado módulo q, un cambio de variable en (4.2) implica $G_q(p) = G_q(1)$, mientras que si no lo es, como los cuadrados y no cuadrados dan todas las raíces de la unidad las cuales suman cero (después de añadir el 1), se tiene $G_q(p) = -G_q(1)$.

Por otro lado es sencillo probar $G_{pq}(1) = G_p(q)G_q(p)$ simplemente escribiendo $k = \lambda p + \mu q$. Entonces la ley de reciprocidad cuadrática equivale a la igualdad

$$G_{pq}(q) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4} G_p(q)G_q(p). \tag{4.3}$$

Experimentalmente es fácil inferir una fórmula exacta para $G_n(1)$ que implica (4.3) pero la demostración es sorprendentemente difícil y requirió considerables esfuerzos por parte de Gauss [2]. Aquí seguiremos [10] para evaluar $G_n(1)$ exactamente si n es impar utilizando aproximaciones integrales inexactas y un poco de aritmética.

Si se considera $f(x) = x^2/n$ con $0 \le x < n/4$ se tiene $0 \le f'(x) < 1/2$ y por tanto gracias a (3.3)

$$\sum_{0\le k<n/4} e^{2\pi i k^2/n} = \int_0^{n/4} \phi(x) e^{2\pi i x^2/n}\, dx + \mathrm{e}_{\mathrm{mc}}.$$

donde, como antes, e_{mc} indica un error menor que una constante. El siguiente trozo de longitud $n/4$ de la suma (4.2) se puede pasar al rango $0 \le k < n/4$ porque para n impar,

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2} - k\right)^2}{n} = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{n} - \frac{n}{4} + \text{un entero}.$$

Además la simetría $k \leftrightarrow n - k$ o $k \leftrightarrow -k$ módulo n prueba que la contribución de los otros dos trozos es idéntica. En suma,

$$G_n(1) = \int_{-n/4}^{n/4} e^{2\pi i x^2/n}\, dx + i^{-n} \int_{-n/4}^{n/4} e^{2\pi i (x-1/2)^2/n}\, dx + \mathrm{e}_{\mathrm{mc}}.$$

Si ampliamos la integración a todo $\mathbb{R}$ sólo se pierde una constante y gracias a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x^2}\, dx = (1+i)/2$ se obtiene

$$G_n(1) = \frac{1+i}{2}(1 + i^{-n})\sqrt{n} + \mathrm{e}_{\mathrm{mc}}.$$

La relación $nG_n(1) = G_{n^3}(1)$ que se deduce escribiendo $k = a + bn^2$ en (4.2) implica que si $|\mathrm{e}_{\mathrm{mc}}| \le K$ entonces $|\mathrm{e}_{\mathrm{mc}}| \le K/n$ e iterando se concluye $\mathrm{e}_{\mathrm{mc}} = 0$. Con este regate aritmético la fórmula anterior se transforma en la flamante evaluación exacta

$$G_n(1) = \frac{1+i}{2}(1 + i^{-n})\sqrt{n}$$

para n impar, de donde se deduce a través de (4.3) la ley de reciprocidad cuadrática (4.1).

5. El teorema de los números primos

Veamos ahora las líneas en las que se puede probar (1.2). El punto de partida es el producto de Euler [5] para $\Re s > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \qquad \text{donde } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{5.1}$$

Su prueba se reduce a emplear $(1-p^{-s})^{-1} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$ y la unicidad de la factorización. La importancia de (5.1) radica en que relaciona la sencilla sucesión de los naturales a través de ζ, con la aparentemente caótica sucesión de primos. En cierto modo permitirá contar primos contando naturales.

La idea general es despejar $\pi(N)$ a partir de (5.1) y en este propósito aparecerán las integrales. Es natural comenzar tomando logaritmos para transformar el producto de (5.1) en una suma y derivar el resultado para evitar los coeficientes de $\log(1-p^{-s}) = -\sum p^{-ks}/k$. Así

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \qquad \text{con} \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{si } n \neq p^k. \end{cases} \tag{5.2}$$

Este $\Lambda(n)$ es la *función de von Mangoldt* ya considerada por P. Chebyshev a través de su suma

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Definiendo $\Pi(N)$ como $\pi(N)$ pero contando también las k-potencias de primos con peso $1/k$,

$$\Pi(N) = \sum_{n=2}^{N} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \int_{2^-}^{N^+} \frac{\psi'(t)}{\log t} = \int_2^N \frac{dt}{\log t} + \int_{2^-}^{N^+} \frac{d(\psi(t)-t)}{\log t}$$

e integrando por partes

$$\Pi(N) = \int_2^N \frac{dt}{\log t} + \frac{\psi(N)-N}{\log N} + \int_2^N \frac{\psi(t)-t}{t\log^2 t}\, dt. \tag{5.3}$$

Está claro que $\pi(N) \sim \Pi(N)$, de hecho con un poco de trabajo se prueba $|\pi(N)-\Pi(N)| < K\sqrt{N}$. Entonces, a través de (5.3), el teorema de los números primos es consecuencia de $\psi(x) \sim x$ y el método para probarlo pasa por despejar $\psi(x) - x$ de (5.2), indirectamente con ello habremos despejado $\pi(N)$ de (5.1).

Es fácil escribir (5.2) en términos de $\psi(x) - x$ procediendo como en (5.3), llegándose a

$$\int_1^{\infty} (\psi(t)-t) t^{-s-1}\, dt = F(s) \qquad \text{con} \qquad F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}. \tag{5.4}$$

¿Cómo despejar el integrando a partir del valor de la integral que depende de un parámetro? Para funciones buenas que decaen en el infinito, el análisis de Fourier tiene un instrumento que logra este propósito, la fórmula de inversión de la transformada de Fourier $\widehat{f}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{2\pi ity}\,dt = f(y) \qquad \text{donde} \qquad \widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixt}\,dx.$$

Intercambiando el orden de sumación y cerrando los ojos al rigor, tenemos

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it(x-y)}\,dt. \tag{5.5}$$

Si en (5.4) escogemos $s = 1 + 2\pi it$ y efectuamos el cambio $t = e^x$ definiendo $\psi(x) - x = 0$ para $x < 1$, se tiene formalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(\frac{\psi(e^x)}{e^x} - 1\big)e^{-2\pi ixt}\,dx = F(1+2\pi it).$$

Sin abrir todavía los ojos, multiplicando por $e^{2\pi ity}$, integrando y usando (5.5),

$$\frac{\psi(e^y)}{e^y} - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(1+2\pi it)e^{2\pi ity}\,dt. \tag{5.6}$$

Si una función decente la integramos contra una función que oscila mucho entonces el resultado será pequeño debido a la cancelación y de esta forma se puede probar que $\lim \psi(e^y)/e^y = 1$ o equivalentemente $\psi(x) \sim x$, que como hemos visto implica el teorema de los números primos (1.2). Sin embargo no está claro que la integral de (5.6) tenga sentido. El análisis armónico tiene trucos para dar un significado a transformadas de Fourier de funciones que no son buenas con tal de que no tengan un crecimiento desmesurado, el principal problema es averiguar si tiene sentido la propia función $F(1 + 2\pi it)$.

Con este propósito observamos que

$$\zeta(s) = \int_{1^-}^{\infty} \frac{\delta_p(x)}{x^s}\,dx = s\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}\,dx = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{[x]-x}{x^{s+1}}\,dx \tag{5.7}$$

y esta última expresión da sentido a $\zeta(s)$ y $\zeta'(s)$ para $\Re s > 0$, $s \neq 1$, y prueba que $F(1)$ está bien definido. Lo único que puede estropear la definición de $F(1 + 2\pi it)$ es que $\zeta(s)$ tenga un cero en $\Re s = 1$. ¿Por qué no ocurre eso? La demostración es truculenta, intuitivamente se basa en que $\zeta(1 + iu) = 0$ implicaría por (5.1) que $|1 - p^{-1-iu}|$ está sesgado hacia $|1 + p^{-1}|$, es decir que $e^{iu\log p}$ se acerca a -1 en promedio, pero esto significa que $e^{2iu\log p}$ se acerca a 1 y de ahí se puede deducir $\zeta(1 + 2iu) = \infty$ que es imposible según (5.7).

A modo de epílogo, mencionaremos que la integral de (5.6) se puede calcular “explícitamente” en función de los ceros de $\zeta(s)$, que son las singularidades de $F(s)$, ya que en variable compleja las funciones y sus integrales, bajo ciertas condiciones de crecimiento, están determinadas por sus singularidades. De esta manera contar primos equivale a calcular una integral y éste cálculo depende de la localización de los ceros de una función de variable compleja.

6. Aproximación diofántica

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ se sabe que $n^2\alpha$ está equidistribuido módulo uno, en particular si $\|\cdot\|$ representa la distancia al entero más cercano entonces $\|n^2\alpha\|$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ da lugar a una nube de puntos que tiene una distribución uniforme en $[0, 1/2]$. Sin embargo se desconocen las propiedades finas de esta distribución. Estamos interesados en saber si

$$\#\{n \in \mathbb{Z}^+ \ : \ \|n^2\alpha\| < n^{-\sigma}\} = \infty \tag{6.1}$$

con una constante dada $0 < \sigma < 1$. Si uno prefiere una cuenta finita puede endurecer un poco el problema y acotar inferiormente, quizá en una sucesión creciente de valores de N,

$$H(N) = \#\{1 \le n \le N \ : \ \|n^2\alpha\| < N^{-\sigma}\}. \tag{6.2}$$

Para cualquier función $0 \le \phi \le 1$ buena con soporte en $[-1/2, 1/2]$ se tiene

$$H(N) \ge \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi\big(N^\sigma(n^2\alpha + m)\big).$$

De nuevo preferimos sumar integrando con (2.2)

$$H(N) \ge \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\big(N^\sigma(n^2\alpha + x)\big)\delta_p(x)\,dx$$

que gracias a (3.1) se escribe como

$$N^{1-\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\phi + N^{-\sigma}\sum_{m\ne 0}\widehat{\phi}(N^{-\sigma}m)\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^2 m\alpha}.$$

Esencialmente $\widehat{\phi}$ es como si tuviera soporte compacto porque, integrando por partes, decae rápido para valores grandes, entonces si se prueba

$$S := \frac{1}{N}\sum_{1\le m\le N^\sigma}\Big|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^2 m\alpha}\Big| < \epsilon \tag{6.3}$$

para una constante ϵ suficientemente pequeña y una sucesión de valores de N, se concluye que la cota buscada para (6.2) en esta sucesión de valores es $KN^{1-\sigma}$, en particular (6.1) sería cierto.

Por la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned} |S|^2 &\le N^{\sigma-2}\sum_{1\le m\le N^\sigma}\ \sum_{|r|<N}\ \sum_{1\le n, n+r\le N} e^{2\pi i((n+r)^2-n^2)m\alpha} \\ &\le N^{\sigma-2}\sum_{1\le m\le N^\sigma}\Big(2N + 2\sum_{r=1}^{N-1}\text{mín}(2N, \|2mr\alpha\|^{-1})\Big). \end{aligned}$$

Cambiando la variable $k = mr$ y escribiendo D para el número máximo de divisores de un número $1 \leq k \leq N^{\sigma+1}$ se tiene

$$|S|^2 \leq 2N^{2\sigma-1} + 2DN^{\sigma-2} \sum_{1\leq k\leq N^{\sigma+1}} \min(2N, \|2\alpha k\|^{-1}).$$

Tomemos N grande e igual al denominador de una convergente de 2α, entonces $|2\alpha - a/N| < 1/2N^2$ y en cada bloque de longitud N la diferencia $(2\alpha - a/N)k$ no oscila significativamente. Con ello no es difícil probar que el sumatorio contribuye una cantidad de orden $N \log N$. En definitiva se tiene

$$|S|^2 \leq KDN^{2\sigma-1} \log N$$

que prueba (6.3) para $\sigma < 1/2$ ya que el número de divisores de un número grande es pequeño en comparación con cualquier potencia positiva suya [8].

En resumidas cuentas, hemos probado (6.1) siempre que $\sigma < 1/2$. Esto era todo lo que se sabía durante casi 50 años años hasta que A. Zaharescu [14] probó en 1995 (6.1) para $\sigma < 2/3$, esto requiere nuevos argumentos y otras integrales.

Referencias

[1] C. Boyer. Historia de las matemáticas. Alianza Editorial. 1989.
[2] H. Davenport. Multiplicative number theory (2nd ed.). Graduate texts in Mathematics 74. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
[3] H. Dym, H.P. McKean. Fourier series and integrals. Probability and Mathematical Statistics 14. Academic Press, New York-London, 1972.
[4] W.J. Ellison. Les nombres premiers. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX. Hermann, Paris, 1975.
[5] L. Euler. *Variae observationes circa series infinitas.* (Traducido al inglés por P. Viader y L. Bibiloni: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`).
[6] C.F. Gauss. Disquisitiones arithmeticae. Springer-Verlag, New York, 1986.
[7] S.W. Graham, G. Kolesnik. Van der Corput's method of exponential sums. London Mathematical Society lecture note series 126. Cambridge University Press, 1991.
[8] G.H. Hardy, E. Wright. An introduction to the theory of numbers. Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
[9] M.N. Huxley. Area, lattice points, and exponential sums. London Mathematical Society Monographs 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.
[10] H. Iwaniec, E. Kowalski. Analytic number theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
[11] T.W. Körner. Fourier analysis. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
[12] D.J. Newman. Analytic number theory. Graduate Texts in Mathematics, 177. Springer-Verlag, New York, 1998.
[13] I. Stewart. De aquí al infinito. Ed. Crítica 1998.
[14] A. Zaharescu. Small values of $n^2\alpha$ (mod 1). Invent. Math. 121 (1995), no. 2, 379–388.